

MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Alexis Fuentes**Auxiliares:** Vicente Salinas**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl**Auxiliar 12: Funciones Complejas, C-R y Series**

23 de noviembre de 2021

P1. Dada una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Demuestre que si f y \bar{f} son holomorfas, entonces f es una función constante.

P2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no vacío y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, una función tal que:

-Existen \hat{u} y $\hat{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciales en todo punto Ω que permiten expresar f en coordenadas cartesianas, $z = x + iy$ y $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$

-Existen u y $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciales en todo punto Ω que permiten expresar f en coordenadas polares, $z = re^{i\theta}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$ y $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$

a) Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Además pruebe que f es holomorfa en Ω si y solo si cumple:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad - \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

b) Con esto obtenga una formula para $f'(z)$ y compruebe que $f(z) = \text{LOG}(z) = \ln(r) + i\theta$, cumple que $f'(z) = \frac{1}{z}$

P3. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \frac{1}{1-z}$, entorno a $z_0 = 0, -1, i$, también dibuje los discos de convergencia y relacione las distancias de los z_0 con $z = 1$.

P4. Calcule los radios de convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2^n) z^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z + 2)^{2^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (\log(n))^2 z^n$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$

Propuestos

1. Calcule la serie de potencias de $f(z) = \frac{2}{z^2 + 1}$ en torno a $z_0 = 1$.

Resumen

Condiciones de Cuchy Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Teorema: Una función compleja es derivable si y solo si cumple las condiciones de Cauchy Riemann y es Frechet diferenciable .

Aproximación de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Radio de Convergencia $R = 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, con c_k el coeficiente de la serie centrada en z_0 .

Obs: El radio puede depender de z_0 **Radio de convergencia:** Si este límite existe también se puede utilizar:

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$