MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 10: EDP

9 de noviembre de 2021

P1. Considere la EDP con las siguientes condiciones de bordes e iniciales (P):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \ \forall x \in (0, L), \ t > 0$$

$$u(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$u(L,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0 \text{ CB en } x = L$$

$$u(x,0) = f(x) \text{ CI para } u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \text{ CI para } \frac{\partial u}{\partial t}$$

a) Usando el método de separación de variables de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, pruebe que para resolver el problema anterior debe encontrarse la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el siguiente problema (P') tenga solución no trivial:

$$\alpha X(x) + X^{(4)}(x) = 0, \ \forall x \in (0, L)$$

$$X(0) = X''(0) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$X(L) = X''(L) = 0 \text{ CB en } x = L$$

b) Pruebe que si $\alpha = 0$, la única solución del problema (P') es $X = 0$

c) Multiplique la EDO del problema (P') por $X(x)$ y luego integre por partes para probar que toda solución de (P') satisface que:

$$\alpha \int_0^L X^2(s) ds + \int_0^L (X''(s))^2 ds$$

d) Use la relación anterior para probar que si $\alpha > 0$ la única solución es $X = 0$

e) Según los resultados anteriores, el problema tiene soluciones no triviales cuando $\alpha < 0$, haga el cambio $-a^4 = \alpha$, con $a > 0$ y resuelva el problema (P') encontrando una solución no trivial.
Hint Recuerde que la solución de la EDO del problema (P') es de la forma:

$$X(x) = A\cosh(ax) + B\sinh(ax) + C\cos(ax) + D\sin(ax)$$

Use las condiciones de borde para encontrar el valor de las constantes y pruebe que $D\sin(ax) = 0$, con esto concluya que las soluciones no triviales se obtienen cuando $a = a_n$, con $n \in \mathbb{N}*$, especificando quién es a_n y $X_n(x)$.

f) Para cada a_n resuelva la ecuación del tiempo y pruebe que la n-sima solución del problema (P), es de la fomra:

sin

$$u_n(x,t) = [A_n \cos(w_n t) + B_n(w_n t)] \sin(a_n x)$$

donde debe especificar el valor de w_n en terminos de a_n y datos del problema.

g) Indique cuál es la solución del problema (P) para las condiciones iniciales:

$$f(x) = 5 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = -7 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

h) Considere el caso general, donde $f(x)$ y $g(x)$ se pueden expandir en serie de Fourier de senos en $[0, L]$. En es te caso, escriba la solución formal $u(x,t)$ del problema (P) como una serie, escribiendo una ecuación que premita calcular A_n y B_n, en función de f, g.

i) Escriba la solución formal para el caso de $f(x) = x(L-x)$ y $g(x) = 0$. Debe calcular los coeficientes.

[illegible] Propio

P2. Resuelva la ecuación de Schrödinger con condición inicial:

$$iu_t(t,x) + u_{xx}(t,x) = 0$$
$$u(0,x) = f(x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Donde las funciones $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ son integrables en la variable x.

Propuestos

Prop1. El objetivo de este problema es calcular la antitransformada de Fourier de la función $g(s) = e^{-i(\alpha s)^2}$, para ello siga el siguiente esquema:

a) Encuentre una ecuación diferencial lineal de primer orden para g.

b) Sea $f(x) = \check{g}(x)$, es decir, f es tal que $\hat{f}(s) = g(s)$. Utilizando adecuadamente las relaciones entre derivadas y transformadas/antitransformadas de Fourier, encuentre una ecuación diferencial lineal de primer orden para f.

c) Resuelva la ecuación en términos del valor de $f(0)$.

d) Calcule el valor de $f(0)$, para ello le pueden resultar útiles las integrales de Fresnel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

e) Concluir que la antitrasformada es $f(x) = \dfrac{1-i}{2\alpha} e^{\frac{ix^2}{4\alpha^2}}$

Resumen

Recuerden que la transformada es lineal

1. $\hat{f}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)dx$
2. $\check{g}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(s)ds$
3. $\widehat{f'}(s) = is\widehat{f}(s)$
4. $\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \widehat{f}(s)$
5. $g'(x) = -ix\check{g}(x)$
6. $g^{(k)}(x) = (-ix)^k \check{g}(x)$
7. $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds$
8. $\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
9. $f\widehat{(x-x_0)}(s) = e^{-isx_0}\hat{f}(s)$
10. $\widehat{e^{is_0x}f(x)}(s) = \hat{f}(s-s_0)$
11. $\widehat{f(ax)}(s) = \dfrac{1}{|a|}\hat{f}\left(\dfrac{s}{a}\right)$
12. $\widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$

	$f(x)$	$\widehat{f}(s)$
1	$\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{1+is}$
2	$e^{-ax^2},\ a > 0$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{s^2}{4a}}$
3	$e^{-a\|x\|},\ a > 0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{a^2+s^2}$
4	$\dfrac{1}{a^2+x^2},\ a > 0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{a}e^{-a\|s\|}$
5	$\begin{cases} k & \|x\| \leq b \\ 0 & \|x\| > b \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}k\dfrac{\operatorname{sen}(bs)}{s}$

Serie de Fourier

Sea $f : [-\mathcal{T}, \mathcal{T}] \to \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right)\right], \quad \forall x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}}\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right)dx, \quad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}}\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right)dx$$

P1. Considere la EDP con las siguientes condiciones de bordes e iniciales (P):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, \ \forall x \in (0, L), \ t > 0$$

$$u(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$u(L,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0 \text{ CB en } x = L$$

$$u(x,0) = f(x) \text{ CI para } u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \text{ CI para } \frac{\partial u}{\partial t}$$

a) Usando el método de separación de variables de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, pruebe que para resolver el problema anterior debe encontrarse la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el siguiente problema (P') tenga solución no trivial:

$\Rightarrow u \neq 0$

$$\alpha X(x) + X^{(4)}(x) = 0, \ \forall x \in (0, L)$$

$$X(0) = X''(0) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$X(L) = X''(L) = 0 \text{ CB en } x = L$$

b) Pruebe que si $\alpha = 0$, la única solución del problema (P') es $X = 0$

c) Multiplique la EDO del problema (P') por $X(x)$ y luego integre por partes para probar que toda solución de (P') satisface que:

$$\alpha \int_0^L X^2(s)ds + \int_0^L (X''(s))^2 ds$$

d) Use la relación anterior para probar que si $\alpha > 0$ la única solución es $X = 0$

e) Según los resultados anteriores, el problema tiene soluciones no triviales cuando $\alpha < 0$, haga el cambio $-a^4 = \alpha$, con $a > 0$ y resuelva el problema (P') encontrando una solución no trivial.
Hint Recuerde que la solución de la EDO del problema (P') es de la forma:

$$X(x) = A\cosh(ax) + B\sinh(ax) + C\cos(ax) + D\sin(ax)$$

$D\sin(aL) = 0$

Use las condiciones de borde para encontrar el valor de las constantes y pruebe que $D\sin(ax) = 0$, con esto concluya que las soluciones no triviales se obtienen cuando $a = a_n$, con $n \in \mathbb{N}*$, especificando quién es a_n y $X_n(x)$.

f) Para cada a_n resuelva la ecuación del tiempo y pruebe que la n-sima solución del problema (P), es de la fomra:

sin

$$u_n(x,t) = [A_n \cos(w_n t) + B_n(w_n t)] \sin(a_n x)$$

donde debe especificar el valor de w_n en terminos de a_n y datos del problema.

g) Indique cuál es la solución del problema (P) para las condiciones iniciales:

$$f(x) = 5\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = -7\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

h) Considere el caso general, donde $f(x)$ y $g(x)$ se pueden expandir en serie de Fourier de senos en $[0, L]$. En es te caso, escriba la solución formal $u(x,t)$ del problema (P) como una serie, escribiendo una ecuación que premita calcular A_n y B_n, en función de f, g.

P1 $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)\,T(t)$$

$\vdots$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = X^{(4)}(x)\,T(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)\,T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)\,T''(t)$$

Reemplazando

$$X(x)T''(t) + e^2 X^{(4)}(x)\,T(t) = 0 \quad \forall x \in (0,L) \quad \forall t > 0$$

$$X(x)\,T''(t) = -e^2 X^{(4)}(x)\,T(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{e^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{-X^{(4)}(x)}{X(x)} = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad -X^{(4)}(x) = \alpha X(x)$$

$$\Rightarrow \quad X^{(4)}(x) + \alpha X(x) = 0 \quad \forall x \in (0, L)$$

Si: $T(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$

no puede pasar

$$u(0,t) = 0 \Leftrightarrow X(0)\,T(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0 \Leftrightarrow X''(0)\,T(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

Es necesario que $X(0) = X''(0) = 0$, para que $T(t)$ no sea siempre 0

De igual manera

$$u(L,t) = 0 \Leftrightarrow X(L)\,T(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0 \Leftrightarrow X''(L)\,T(t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \quad X(L) - X'(L) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha X(x) + X^{(4)}(x) = 0 \qquad \forall x \in (0, L)$$

$$X(0) = X''(0) = 0 \qquad (\square)$$

$$X(L) = X''(L) = 0 \qquad (\star)$$

b) $\boxed{\alpha = 0}$

$$\Rightarrow \quad X^{(4)}(x) = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = K_1 + K_2 x + K_3 x^2 + K_4 x^3$$

de $\square$

$$K_1 = 0 = X(0), \quad X''(x) = 2K_3 + 6K_4 x$$

$$X'(0) \Rightarrow 2K_3 = 0$$

$$\Rightarrow K_3 = 0$$

$$\Rightarrow X(x) = K_2 x + K_4 x^3$$

$$X''(x) = 6K_4 x$$

④ $X''(L) = 6K_4 L = 0 \Rightarrow K_4 = 0$

$$X(x) = K_2 x$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow K_2 = 0$$

$$\boxed{X(x) \equiv 0}$$

c) $\alpha X(x) + X^{(4)}(x) = 0 \quad / \cdot X(x)$

$$\alpha X(x)^2 + X^{(4)}(x) X(x) = 0 \quad / \int_0^L dx$$

$$\alpha \int_0^L X(x)^2 dx + \underbrace{\int_0^L \underbrace{X(x)}_{u} \underbrace{X^{(4)}(x) dx}_{dv}} = 0$$

$$\int_0^L \underbrace{X(x)}_{u}\, \underbrace{X^{(4)}(x)\,dx}_{dv} = \overset{0 \text{ (en ambos)}}{\cancel{X(x)\, X^{(3)}(x)\Big|_0^L}} - \int_0^L X'(x)\, X^{(3)}(x)\,dx$$

$$v = X^{(3)}(x) \qquad = -\int_0^L \underbrace{X'(x)}_{u}\, \underbrace{X^{(3)}(x)\,dx}_{dv} \rightarrow v = X^{(2)}(x)$$

$$= -\left(\overset{0}{\cancel{X'(x)\, X^{(2)}(x)\Big|_0^L}} - \int_0^L X''(x)^2\,dx \right)$$

$$= \int_0^L X''(x)^2\,dx$$

Reemplazando

$$(V)$$

$$\underbrace{\lambda \int_0^L X^2(x)\,dx}_{\substack{\geq 0 \\ = 0}} + \underbrace{\int_0^L X''(x)^2\,dx}_{\substack{\geq 0 \\ = 0}} = 0$$

d) $\boxed{\text{Si} \quad \lambda > 0}$, Si $X(x) \neq 0$

(V)

$\Rightarrow$

$$\lambda \int_0^L X^2(x)\,dx = 0$$

$x_0 \in (0,L)$

$$|X(x_0)| > 0 \quad \Rightarrow \lambda \int_0^L X^2(x)\,dx > 0 \quad *$$

Solo $X \equiv 0$

e) $\lambda = -a^4$

$$\Rightarrow \quad -a^4 X(x) + X^{(4)}(x) = 0$$

$$X(0) = X''(0) = 0 \qquad (1)$$

$$X(L) = X''(L) = 0 \qquad (2)$$

Soluc. $X(x) = A\cosh(ax) + B\sinh(ax) + C\cos(ax) + D\sin(ax)$

(1)

$x''(0)=0$

$$A + C = 0 \quad \text{y} \quad a^2 A - a^2 C = 0$$

$x(0)=0$ $\Uparrow$

$$\Rightarrow A - C = 0$$

$$\Rightarrow A = C = 0$$

(2)

$$x(L)=0 \Rightarrow B \sinh(aL) + D \sin(aL) = 0 \quad (3)$$

$$x''(L)=0 \Rightarrow B a^2 \sinh(aL) - D a^2 \sin(aL) = 0$$

$$\Rightarrow B \sinh(aL) - D \sin(aL) = 0 \quad (4)$$

Sumando (3) + (4)

$$2 B \sinh(aL) = 0$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Solo se Anula en $x=0$

$$\Rightarrow B = 0$$

$\Rightarrow \quad D \sin(aL) = 0$ (Se Tiene que Cumplir)

$$X(x) = D \sin(ax)$$

Como $D \neq 0 \Rightarrow X \equiv 0$

impondremos que $\sin(aL) = 0$

$$\Rightarrow a_N L = N\pi \quad , N \in \{1, \dots\}$$

$$\Rightarrow a_N = \frac{N\pi}{L}$$

$$\boxed{X_N(x) = D_N \sin(a_N x)}$$

$$\alpha = -\left(\frac{N\pi}{L}\right)^4$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)} = \alpha = -\left(\frac{N\pi}{L}\right)^4$$

$$\boxed{\begin{gathered}\lambda^2 + w^2 = 0 \\ \lambda = \pm i w\end{gathered}}$$

$$T''(t) + \left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2}\right)^2 T(t) = 0$$

$$T(t) = F_1 \cos\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2}t\right) + F_2 \sin\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2}t\right)$$

$$u_N(x,t) = \left(A_N \cos\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2}t\right) + B_N \sin\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2}t\right)\right)\sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right)$$

Principle Superposition

$$u(x,t) = \sum_{N=1}^{\infty} u_N(x,t)$$

$$u(x,t) = \sum_{N=1}^{\infty}\left(A_N \cos\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2}t\right) + B_N \sin\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2}t\right)\right)\sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right)$$

$$f(x) = 5\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = -7\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

) y $g(x)$ se pueden expandir en

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= 5\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$A_n = 0 \qquad \forall\ n \neq 4$$

$$A_4 = 5$$

Es valido por que

$$\boxed{0 = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx}$$

Si $n \neq m$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{N=1}^{\infty} \left[-A_N \left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2}\right) \sin(w_N t) + B_N w_N \cos(w_N t) \right] \sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{N=1}^{\infty} B_N w_N \sin\left(\frac{N\pi}{L} x\right)$$

$g(x)$

$$= -7 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$B_N = 0 \qquad \forall N \neq 4$$

$$B_4 = 0$$

$$u(x,t) = \left\{ 5 \cos\left(\frac{16\pi^2}{L^2} c t\right) - \frac{7L^2}{16\pi^2 c} \sin\left(\frac{16\pi^2}{L^2} c t\right) \right\} \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{N=1}^{\infty} \left(A_N \cos\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2} t\right) + B_N \sin\left(\frac{cN^2\pi^2}{L^2} t\right) \right) \sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right)$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{N=1}^{\infty} A_N \sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right)$$

$$f(x) = \sum_{N=1}^{\infty} b_N \sin\left(\frac{N\pi x}{L}\right) + a_N \cos\left(\frac{N\pi x}{L}\right)$$

$f(x)$ Tiene serie de Senos $\left(\underset{\text{impar}}{f(x)}\right)$

$$a_N = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{impar}} \underbrace{\cos\left(\frac{N\pi x}{L}\right)}_{\text{par}}}_{0} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\boxed{A_n = b_n}$$

De m nore Similar

$$g(x) = \sum B_n \cdot e^{\frac{n^2\pi^2}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \sum \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

[illegible]

$$\boxed{B_n = \frac{2L}{cn^2\pi^2}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}$$

Case $g(x) = 0$

$$\Rightarrow B_n = 0$$

Case $f(x) = x(L-x)$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L xL\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - x^2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(-xL \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{2}{n\pi}\Big|_0^L + \int_0^L \cancel{\frac{L^2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx}^{\,0} \right.$$

$$+ x^2 \frac{L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L - \int \frac{2Lx}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\cancel{-L^3\frac{(-1)^n}{n\pi}} + \cancel{L^3\frac{(-1)^n}{n\pi}} - \cancel{\frac{2Lx}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L}^{\,0} \right.$$

$$\left. + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \right)$$

$$= \frac{4L^2}{n^3\pi^3}\left(-\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\Big|_0^L$$

$$= \left(1-(-1)^n\right)\frac{4L^2}{n^3\pi^3} = \frac{4L^2}{(2n+1)^3\pi^3}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{(2n+1)^3\pi^3}\cos\left(\frac{cn^2\pi^2}{L^2}t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

P2. Resuelva la ecuación de Schrödinger con condición inicial:

$$iu_t(t,x) + u_{xx}(t,x) = 0$$
$$u(0,x) = f(x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Donde las funciones $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ son integrables en la variable x.

Aux 11