MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 11: EDP

16 de noviembre de 2021

P1. Resuelva la ecuación de Schrödinger con condición inicial:

$$iu_t(t,x) + u_{xx}(t,x) = 0$$
$$u(0,x) = f(x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Donde las funciones $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ son integrables en la variable x.

P2. Las vibraciones de una varilla semi-infinita se modelan por la ecuación:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \qquad\qquad x > 0, t > 0$$

Suponga que la varilla satisface una condición de Neumann en el origen $u_x(t,0) = 0 \forall t > 9$; que $\int_0^\infty |u(t,x)|dx < \infty$; y que inicialmente se encuentra en reposo $u_t(0,x) = 0$ en la posición $u(0,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ para $x > 0$.

Indicación: La transformada de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$.

a) Considere $v(t,\cdot)$ la extensión par de la función $u(t,\cdot)$. Verifique que esta extensión satisface el problema para $x \in R$ y $t > 0$.

b) Deduzca que la transformada de $v(t,\cdot)$ es $\hat{v}(t,s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(as^2 t)$

c) Concluya que la solución $u(t,x)$, se puede escribir como:

$$u(t,x) = \int_0^\infty e^{-s} \cos(sx) \cos(as^2 t) ds$$

Resumen

Recuerden que la transformada es lineal

1. $\hat{f}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)dx$
2. $\check{g}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(s)ds$
3. $\widehat{f'}(s) = is\widehat{f}(s)$
4. $\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \widehat{f}(s)$
5. $g'(x) = -ix\check{g}(x)$
6. $g^{(k)}(x) = (-ix)^k \check{g}(x)$
7. $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds$
8. $\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
9. $f\widehat{(x - x_0)}(s) = e^{-isx_0}\hat{f}(s)$
10. $\widehat{e^{is_0x}f(x)}(s) = \hat{f}(s - s_0)$
11. $\widehat{f(ax)}(s) = \dfrac{1}{|a|}\hat{f}\left(\dfrac{s}{a}\right)$
12. $\widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$

	$f(x)$	$\widehat{f}(s)$
1	$\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{1+is}$
2	$e^{-ax^2}, \ a > 0$	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$
3	$e^{-a\|x\|}, \ a > 0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{a}{a^2+s^2}$
4	$\dfrac{1}{a^2+x^2}, \ a > 0$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{a} e^{-a\|s\|}$
5	$\begin{cases} k & \|x\| \leq b \\ 0 & \|x\| > b \end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} k \dfrac{\operatorname{sen}(bs)}{s}$

Serie de Fourier

Sea $f : [-\mathcal{T}, \mathcal{T}] \to \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right], \quad \forall x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx$$

P1. Resuelva la ecuación de Schrödinger con condición inicial:

$$(1) \quad iu_t(t,x) + u_{xx}(t,x) = 0$$
$$(2) \quad u(0,x) = f(x),\ t > \cancel{0,\ x \in \mathbb{R}} \quad \forall x \in R$$

Donde las funciones $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ son integrables en la variable x.

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)dx$$

(1) debe ser el dominio de $f(x)$

$$u_{yy} + u_{xx} = 0$$

$$(2) \quad u(0,x) = f(x) \quad \forall x \in R$$

$$\Rightarrow \widehat{u(0,x)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} u(0,x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)dx$$

Respecto a t

$$= \hat{f}(\lambda)$$

$$\widehat{u(0,x)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} u(t, \quad dt$$

$u(t,$

(1) $i\, u_t(t,x) = -u_{xx}(t,x) \quad \forall t>0,\ x\in\mathbb{R}$

(2) $u(0,x) = f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

(1) Aplicando transformada sobre x

$$i\,\mathcal{F}(u_t(t,x))(\nu) = -\mathcal{F}(u_{xx}(t,x))(\nu)$$

$$i\,\frac{d}{dt}\mathcal{F}(u(t,x))(\nu) = -(i\nu)^2\,\mathcal{F}(u(t,x))(\nu)$$

$$\frac{d}{dt}U(t,\nu) = \frac{\nu^2}{i}U(t,\nu)$$

$$\frac{d}{dt}U(t,\nu) = \underbrace{-i\,\nu^2}_{a}\,U(t,\nu)$$

Sol: $\underline{U(t,\nu) = e^{-i\nu^2 t}\, U(0,\nu)}$

$$U(0,\nu) = \mathcal{F}(u(0,x))(\nu)$$
$$= \hat{f}(\nu)$$

$$\Rightarrow U(t,\nu) = e^{-i\nu^2 t}\,\hat{f}(\nu)$$

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu x}\, e^{-i\nu^2 t}\,\hat{f}(\nu)\, d\nu$$

Si $\hat{h}(\nu) = e^{-i\nu^2 t}$

Opción a veces

$$= \hat{h}(\nu) \cdot \hat{f}(\nu)$$

$$U(t,\nu) = \widehat{h * f}(\nu)$$

$$u(t,x) = h * f(x)$$

P2. Las vibraciones de una varilla semi-infinita se modelan por la ecuación:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \qquad \boxed{x > 0} \; t > 0$$

Suponga que la varilla satisface una condición de Neumann en el origen $u_x(t,0) = 0 \forall t >$ ✓; que $\int_0^\infty |u(t,x)|dx < \infty$; y que inicialmente se encuentra en reposo $u_t(0,x) = 0$ en la posición $u(0,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ para $x > 0$.

Indicación: La transformada de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$.

a) Considere $v(t,\cdot)$ la extensión par de la función $u(t,\cdot)$. Verifique que esta extensión satisface el problema para $x \in R$ y $t > 0$.

b) Deduzca que la transformada de $v(t,\cdot)$ es $\hat{v}(t,s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(as^2 t)$

c) Concluya que la solución $u(t,x)$, se puede escribir como:

$$u(t,x) = \int_0^\infty e^{-s} \cos(sx) \cos(as^2 t) ds$$

$$v(t,\cdot) = \begin{cases} u(t,x) & x \geq 0 \\ u(t,-x) & x < 0 \end{cases}$$

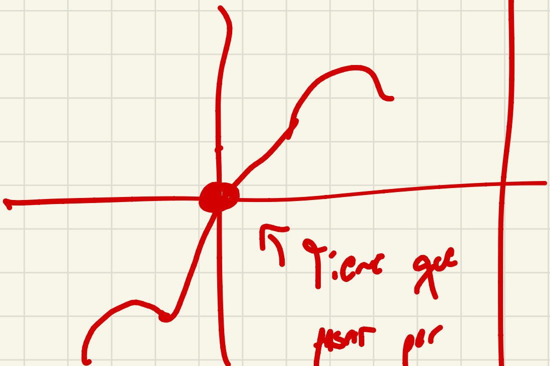
$$v(t,-x) = v(t,x)$$

Como sería la extensión impar

$$v(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & x \geq 0 \\ -u(t,-x) & x < 0 \end{cases}$$

Caso Continuas

Impar

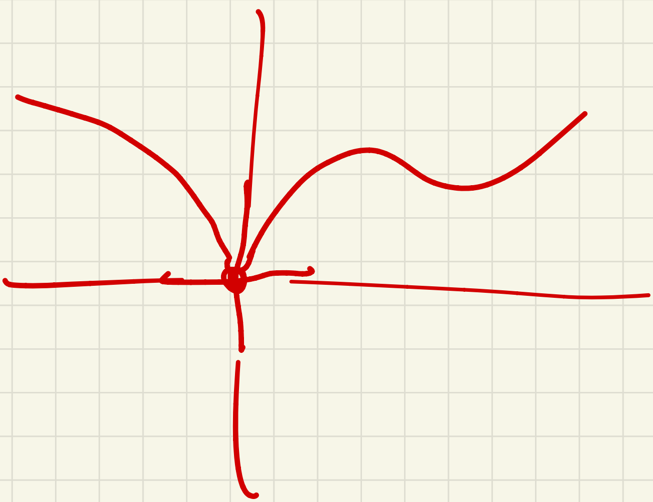


↑ Tiene que pasar por el origen

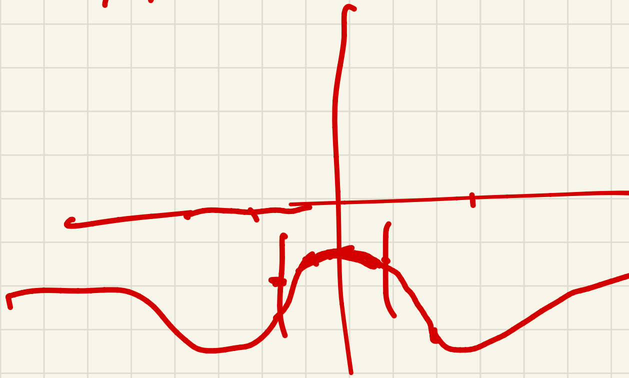
$$\boxed{f(0) = 0}$$

Ejemplo $\sin(x)$

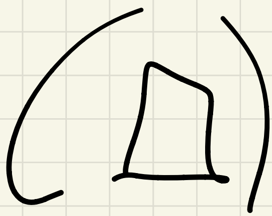
$f'(0)$ No se sabe



Par



$$\boxed{f'(0) = 0}$$



Prop: verificar $\boxed{\text{I}}$ ✓ $v_x(t,0)=0$

$$v_{tt}(t,x) + a^2 v_{xxxx}(t,x) = 0 \quad (1)$$

$$v_t(0,x) = 0 \quad (2)$$

$$v(0,x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

$$v(t,x) = \begin{cases} u(t,x) & x \geq 0 \\ u(t,-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$v_{tt}(t,x) = \begin{cases} u_{tt}(t,x) & x \geq 0 \\ u_{tt}(t,-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$v_{xxxx}(t,x) = \begin{cases} u_{xxxx}(t,x) & x \geq 0 \\ \underbrace{(-1)^4}_{1} u_{xxxx}(t,-x) & x < 0 \end{cases}$$

Para $x \geq 0$

$$v_{tt}(t,x) + a^2 v_{xxxx} = u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0$$

Para $x < 0$

$$v_{tt}(t,x) + a^2 v_{xxxx}(t,x) =$$
$$u_{tt}(t,-x) + a^2 u_{xxxx}(t,-x)$$

Con el cambio $z = -x$

$z > 0$

$$u_{tt}(t,z) + a^2 u_{xxxx}(t,z) = 0$$

$$u_t(0,x) = \begin{cases} u_t(0,x) = 0 & x \geq 0 \\ u_t(0,-x) = 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$= 0$$

$$v(0,x) = \begin{cases} u(0,x) & x \geq 0 \\ u(0,-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

b) $v_{tt}(t,x) = -a^2 v_{xxxx}(t,x) \,/\, \mathcal{F}_{x \to \lambda}$

$$\frac{d^2}{dt^2} \hat{v}(t,\lambda) = -a^2 \lambda^4 \hat{v}(t,\lambda)$$

Por EDO

$$\hat{v}(t,\lambda) = A(\lambda) \cos(a\lambda^2 t) + B(\lambda) \sin(a\lambda^2 t)$$

$\hat{v}(0,\lambda)$ viene de $u(0,x)\ \frac{1}{1+x^2}$

$\hat{v}_t(0,\lambda)$ viene de $u_t(0,x) = 0$

☺

$$\hat{v}(0,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu x}\, v(0,x)\, dx$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} e^{-i\nu x} \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

Por H.pds

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|\nu|}$$

⊛

$$\hat{v}_t(0,\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu x}\, v_t(0,x)\, dx$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} e^{-i\nu x} \cdot 0\, dx$$

$$= 0$$

$$\hat{v}_t(t,\nu) = -A(\nu)\, \nu^2 a\, \sin(a\nu^2 t) + B(\nu)\, \nu^2 a\, \cos(a\nu^2 t)$$

$$\hat{v}_t(0,\nu) = B(\nu)\,\nu^2 a \overset{(A)}{=} 0 \quad \forall \nu$$

$$\Rightarrow \quad B(\nu) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \hat{v}(t,\nu) = A(\nu)\cos(a\nu^2 t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{v}(t,\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|\nu|} \cos(a\nu^2 t)}$$

c) $$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|\nu|} \cos(a\nu^2 t)\, e^{i\nu x}\, d\nu$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-|\nu|}}_{\text{par}} \underbrace{\cos(a\nu^2 t)}_{\text{par}} \Big[\underbrace{\cos(\nu x)}_{\text{par} \to 2 \text{ veces}} + \underbrace{i\sin(\nu x)}_{\text{impar} \to 0}\Big]\, d\nu$$

$$\overset{\text{Paridad}}{=} \int_0^{\infty} e^{-|\nu|} \cos(a\nu^2 t)\cos(\nu x)\, d\nu$$

$$v(t,x) = \int_0^{\infty} e^{-\nu} \cos(a\nu^2 t)\cos(\nu x)\, d\nu$$

$$\boxed{u(t,x) = \int_0^\infty e^{-\nu} \cos(a\nu^2 t)\cos(\nu x)\,d\nu \qquad \text{Para } x>0}$$

$$x'' + a x' + x$$

$$\lambda^2 + a\lambda + 1$$

$$e^{\lambda_i x}$$

$$e^{\lambda x} \qquad x e^{\lambda x}$$