**MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**
**Profesor:** Alexis Fuentes
**Auxiliares:** Vicente Salinas
**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl

# Auxiliar 11: EDP

16 de noviembre de 2021

**P1.** Resuelva la ecuación de Schrödinger con condición inicial:

$$iu_t(t,x) + u_{xx}(t,x) = 0$$
$$u(0,x) = f(x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Donde las funciones $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ son integrables en la variable $x$.

**P2.** Las vibraciones de una varilla semi-infinita se modelan por la ecuación:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \qquad\qquad x > 0, t > 0$$

Suponga que la varilla satisface una condición de Neumann en el origen $u_x(t,0) = 0 \forall t > 9$; que $\int_0^\infty |u(t,x)|dx < \infty$; y que inicialmente se encuentra en reposo $u_t(0,x) = 0$ en la posición $u(0,x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ para $x > 0$.

**Indicación:** La transformada de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|}$.

*a*) Considere $v(t,\cdot)$ la extensión par de la función $u(t,\cdot)$. Verifique que esta extensión satisface el problema para $x \in R$ y $t > 0$.

*b*) Deduzca que la transformada de $v(t,\cdot)$ es $\hat{v}(t,s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} \cos(as^2 t)$

*c*) Concluya que la solución $u(t,x)$, se puede escribir como:

$$u(t,x) = \int_0^\infty e^{-s} \cos(sx) \cos(as^2 t) ds$$

## Resumen

**Recuerden que la transformada es lineal**

1. $\hat{f}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)dx$
2. $\check{g}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(s)ds$
3. $\widehat{f'}(s) = is\widehat{f}(s)$
4. $\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \widehat{f}(s)$
5. $g'(x) = -ix\check{g}(x)$
6. $g^{(k)}(x) = (-ix)^k \check{g}(x)$
7. $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds$
8. $\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
9. $f\widehat{(x - x_0)}(s) = e^{-isx_0}\hat{f}(s)$
10. $\widehat{e^{is_0x}f(x)}(s) = \hat{f}(s - s_0)$
11. $\widehat{f(ax)}(s) = \dfrac{1}{|a|}\hat{f}\left(\dfrac{s}{a}\right)$
12. $\widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$

| | $f(x)$ | $\widehat{f}(s)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{1+is}$ |
| 2 | $e^{-ax^2},\ a > 0$ | $\dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$ |
| 3 | $e^{-a\|x\|},\ a > 0$ | $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{a}{a^2+s^2}$ |
| 4 | $\dfrac{1}{a^2+x^2},\ a > 0$ | $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{a} e^{-a\|s\|}$ |
| 5 | $\begin{cases} k & \|x\| \leq b \\ 0 & \|x\| > b \end{cases}$ | $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} k \dfrac{\operatorname{sen}(bs)}{s}$ |

**Serie de Fourier**

Sea $f : [-\mathcal{T}, \mathcal{T}] \to \mathbb{R}$. Diremos que $f$ admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right], \qquad \forall x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right)dx$$