MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 10: EDP

9 de noviembre de 2021

P1. Considere la EDP con las siguientes condiciones de bordes e iniciales (P):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,\ \forall x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$u(L, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0 \text{ CB en } x = L$$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ CI para } u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \text{ CI para } \frac{\partial u}{\partial t}$$

a) Usando el método de separación de variables de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, pruebe que para resolver el problema anterior debe encontrarse la constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que el siguiente problema (P') tenga solución no trivial:

$$\alpha X(x) + X^{(4)}(x) = 0,\ \forall x \in (0, L)$$

$$X(0) = X''(0) = 0 \text{ CB en } x = 0$$

$$X(L) = X''(L) = 0 \text{ CB en } x = L$$

b) Pruebe que si $\alpha = 0$, la única solución del problema (P') es $X = 0$

c) Multiplique la EDO del problema (P') por $X(x)$ y luego integre por partes para probar que toda solución de (P') satisface que:

$$\alpha \int_0^L X^2(s) ds + \int_0^L (X''(s))^2 ds$$

d) Use la relación anterior para probar que si $\alpha > 0$ la única solución es $X = 0$

e) Según los resultados anteriores, el problema tiene soluciones no triviales cuando $\alpha < 0$, haga el cambio $-a^4 = \alpha$, con $a > 0$ y resuelva el problema (P') encontrando una solución no trivial.
Hint Recuerde que la solución de la EDO del problema (P') es de la forma:

$$X(x) = A\cosh(ax) + B\sinh(ax) + C\cos(ax) + D\sin(ax)$$

Use las condiciones de borde para encontrar el valor de las constantes y pruebe que $D\sin(ax) = 0$, con esto concluya que las soluciones no triviales se obtinen cuando $a = a_n$, con $n \in \mathbb{N}*$, especificando quién es a_n y $X_n(x)$.

f) Para cada a_n resuelva la ecuación del tiempo y pruebe que la n-sima solución del problema (P), es de la fomra:

$$u_n(x,t) = [A_n \cos(w_n t) + B_n(w_n t)] \sin(a_n x)$$

donde debe especificar el valor de w_n en terminos de a_n y datos del problema.

g) Indique cuál es la solución del problema (P) para las condiciones iniciales:

$$f(x) = 5 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = -7 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

h) Considere el caso general, donde $f(x)$ y $g(x)$ se pueden expandir en serie de Fourier de senos en $[0, L]$. En es te caso, escriba la solución formal $u(x,t)$ del problema (P) como una serie, escribiendo una ecuación que premita calcular A_n y B_n, en función de f, g.

i) Escriba la solución formal para el caso de $f(x) = x(L-x)$ y $g(x) = 0$. Debe calcular los coeficientes.

P2. Resuelva la ecuación de Schrödinger con condición inicial:

$$iu_t(t,x) + u_{xx}(t,x) = 0$$
$$u(0,x) = f(x),\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Donde las funciones $u : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ son integrables en la variable x.

Propuestos

Prop1. El objetivo de este problema es calcular la antitransformada de Fourier de la función $g(s) = e^{-i(\alpha s)^2}$, para ello siga el siguiente esquema:

a) Encuentre una ecuación diferencial lineal de primer orden para g.

b) Sea $f(x) = \check{g}(x)$, es decir, f es tal que $\hat{f}(s) = g(s)$. Utilizando adecuadamente las relaciones entre derivadas y transformadas/antitransformadas de Fourier, encuentre una ecuación diferencial lineal de primer orden para f.

c) Resuelva la ecuación en términos del valor de $f(0)$.

d) Calcule el valor de $f(0)$, para ello le pueden resultar útiles las integrales de Fresnel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

e) Concluir que la antitrasformada es $f(x) = \dfrac{1-i}{2\alpha} e^{\frac{ix^2}{4\alpha^2}}$

Resumen

Recuerden que la transformada es lineal

1. $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx$
2. $\check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(s) ds$
3. $\widehat{f'}(s) = is\widehat{f}(s)$
4. $\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \widehat{f}(s)$
5. $g'(x) = -ix\check{g}(x)$
6. $g^{(k)}(x) = (-ix)^k \check{g}(x)$
7. $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) g(x-s) ds$
8. $\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s)$
9. $f\widehat{(x - x_0)}(s) = e^{-isx_0} \hat{f}(s)$
10. $\widehat{e^{is_0 x} f(x)}(s) = \hat{f}(s - s_0)$
11. $\widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$
12. $\widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$

	$f(x)$	$\widehat{f}(s)$
1	$\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+is}$
2	e^{-ax^2}, $a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$
3	$e^{-a\|x\|}$, $a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + s^2}$
4	$\frac{1}{a^2 + x^2}$, $a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} e^{-a\|s\|}$
5	$\begin{cases} k & \|x\| \leq b \\ 0 & \|x\| > b \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{\operatorname{sen}(bs)}{s}$

Serie de Fourier

Sea $f : [-\mathcal{T}, \mathcal{T}] \to \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right], \quad \forall x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx$$