MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 8: Series de Fourier

19 de octubre de 2021

P1. *a*) Dada la función $f(x) = 1 - |x|$ calcule su serie de Fourier en $[-1, 1]$. Mencione por que esto es equivalente a que nos pidan su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$

b) Dada la función $f(x) = 2 - |x|$ calcule su serie de Fourier en $[0, 2]$, considerando a $f(x)$ una función periódica con $\mathcal{T} = 1$. Explique porque **no** es lo mismo que calcular la la expansión en senos o cosenos con $\mathcal{T} = 2$.

P2. Desarrolle en serie de Fourier la función $f(x) = 0$ si $-\pi < x < 0$ ó $f(x) = x$ si $0 < x < \pi$.
Aplique el teorema de convergencia para deducir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Comente que valores toma $S_f(x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$

P3. Sea $0 < \delta < \infty$. Considere la función $1_{[-\delta,\delta]}(x) = 0$ si $|x| > \delta$ ó 1, para $|x| \leq \delta$

a) a) Demuestre que esta función es integrable y, luego, pruebe que $F(1_{[-\delta,\delta]})(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sin(\delta s)}{s}$

b) Se define la función $\Lambda(x)$ como $\Lambda(x) = 0$, si $|x| > 1$ ó $1 - |x|$, si $|x| \leq 1$ Pruebe que

$$(1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})(x) = \Lambda(x)$$

c) Concluya que $F(\Lambda)(s) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{sin^2(\frac{s}{2})}{s^2}$

Propuestos

Prop 1. **[Identidad de Parseval]** Sea $f \in C^1$, $2\pi-$periódica, tal que $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

a) Probar la identidad de Parseval:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

b) Deduzca que :

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2)$$

c) Pruebe la desigualdad de Wirtinger:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)dx$$

d) Pruebe que se da la igualdad si y sólo si $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

Resumen

Serie de Fourier

Sea $f : [-\mathcal{T},\mathcal{T}] \to \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T},\mathcal{T}]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right)\right], \qquad \forall x \in [-\mathcal{T},\mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}}\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}}\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right)dx$$

Convergencia

Nos interesa saber cuando la serie de Fourier converge a la función, o sea, si definimos:

$$S_f^N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right)\right]$$

Y llamamos $S_f = \lim_{N\to\infty} S_f^N$ (si es que existe), entonces, ¿Cuándo $S_f = f$?

- Si f es de cuadrado integrable $(\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f^2(t)dt < \infty)$, Entonces S_f^N converge a f en media cuadrática: $\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} (f(x) - S_f^N)^2 dx \to 0$ cuando $N \to \infty$.
- Si f es continua por trozos en $[-\mathcal{T},\mathcal{T}]$ y con derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de $(-\mathcal{T},\mathcal{T})$, don derivada por la izquierda en $x = \mathcal{T}$ y por la derecha en $x = -\mathcal{T}$, entonces $S_f^N(x)$ es convergente para cada $x \in [-\mathcal{T},\mathcal{T}]$. Y se tiene que:

$$S_f(\mathcal{T}) = S_f(-\mathcal{T}) = \frac{1}{2}[f(\mathcal{T}) + f(-\mathcal{T})]$$

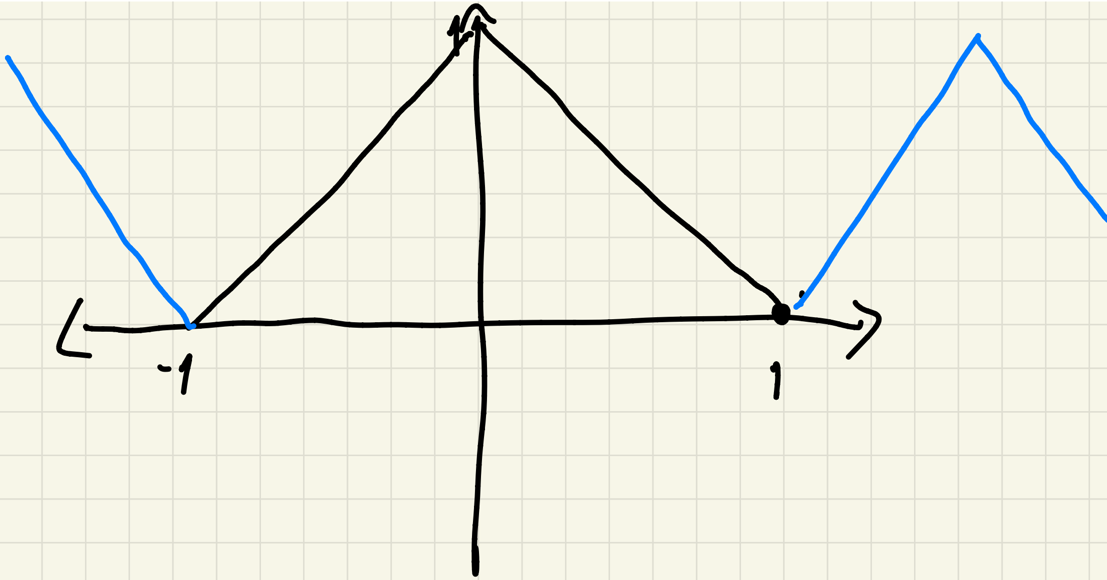
  Si f es continua en x_0 entonces $S_f(x_0) = f(x_0)$ y si x_0 es un punto de discontinuidad entonces $S_f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$
- Si f es derivable en $[-\mathcal{T},\mathcal{T}]$ y $f(\mathcal{T}) = f(-\mathcal{T})$ entonces $f = S_f$ en $[-\mathcal{T},\mathcal{T}]$. Si además f' es de cuadrado integrable, la convergencia de S_f^N hacia f es uniforme.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $2\mathcal{T}-$periódica de clase C^1 entonces $f = S_f$ en $\mathbb{R}$ y S_f^N converge uniformemente a f.

1. $\hat{f}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}f(x)dx$
2. $\check{g}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}g(s)ds$
3. $\widehat{f'}(s) = is\widehat{f}(s)$
4. $\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k\widehat{f}(s)$
5. $g'(x) = -ix\check{g}(x)$
6. $g^{(k)}(x) = (-ix)^k\check{g}(x)$
7. $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds$
8. $\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$

P1. *a*) Dada la función $f(x) = 1 - |x|$ calcule su serie de Fourier en $[-1, 1]$. Mencione por que esto es equivalente a que nos pidan su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$ $\searrow [-\pi, \pi]$

b) Dada la función $f(x) = 2 - |x|$ calcule su serie de Fourier en $[0, 2]$, considerando a $f(x)$ una función periódica con $\mathcal{T} = 1$. Explique porque **no** es lo mismo que calcular la la expansión en senos o cosenos con $\mathcal{T} = 2$.

a)



Notemos que $f(x)$ es par

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ Solo Tendra Cosenos

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)\cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)}_{g(x)} dx$$

$$g(-x) = f(-x) \sin(n\pi(-x))$$
$$= -f(x)\sin(n\pi x)$$
$$= -g(x)$$

Como g impar

$$\Rightarrow \int_{-Algo}^{Algo} g(x)\,dx = 0$$

$$b_n = 0$$

$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ / Como $f(x)$ es par

$$= 2\int_0^1 f(x)\,dx$$

$f(x) = 1-|x|$

$$= 2\int_0^1 1-x\,dx$$

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx \quad \int_0^1 f(x)\,dx$

$\int_1^0 f(-x)\,dx$

$$= 2 \cdot \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 \qquad \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 2(0)$$

$$a_0 = \boxed{1}$$

$$a_N = \int_{-1}^{1} \underbrace{f(x) \cdot \cos(N\pi x)}_{par}\, dx \quad \Big/ \begin{array}{l} \text{como} \\ \text{par} \cdot \text{par} \\ \text{es par} \end{array}$$

$$= 2 \int_0^1 \underbrace{(1-x)}_{u}\, \underbrace{\cos(N\pi x)\, dx}_{dv}$$

$$= 2\left(\cancel{(1-x)\, \underbrace{\frac{\sin(N\pi x)}{N\pi}}_{v} \Big|_0^1}^{\to 0} - \int_0^1 (-1)\, \frac{\sin(N\pi x)}{N\pi}\, dx \right)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x)\, dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left(- \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2} \left(1 - \underbrace{\cos(n\pi)} \right)$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2} \left(1 - (-1)^n \right)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{Si } n \text{ es par} \\ \dfrac{4}{(n\pi)^2} & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$S_{f(x)} = \frac{1}{2} + \sum_{N=1}^{\infty} a_N \cos(N\pi x) + \cancel{b_N \sin(N\pi x)}\ 0$$

$$\boxed{N = 2K-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{N \text{ impares}} \frac{4}{(N\pi)^2} \cos(N\pi x)$$

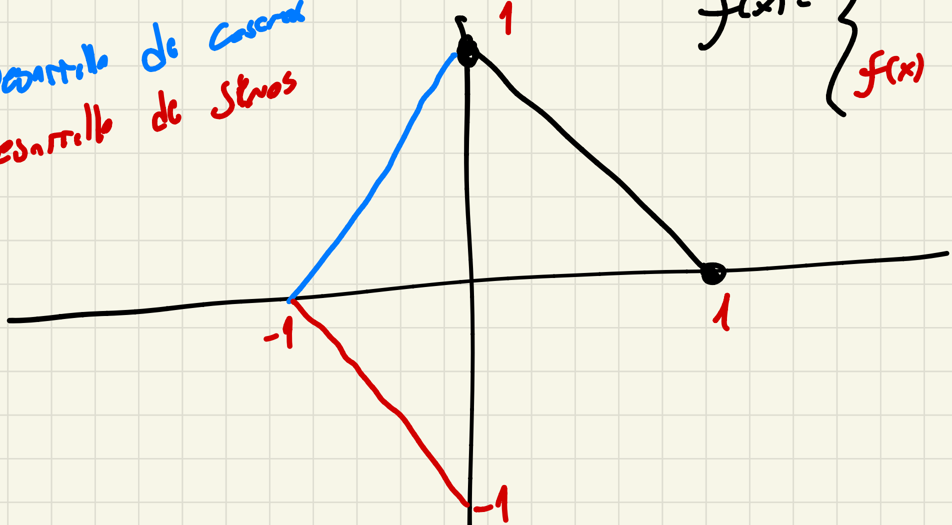
$$= \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{4}{\left((2K-1)\pi\right)^2} \cos\left((2K-1)\pi x\right)$$

Senos

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & x>0 \\ f(x) & x<0 \end{cases}$$

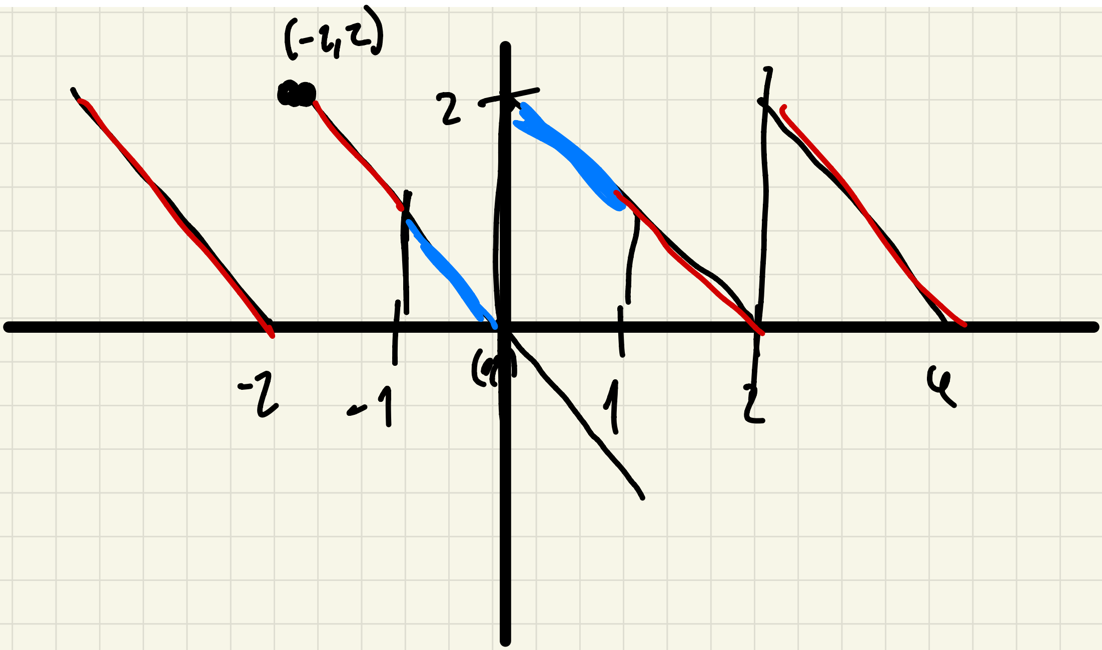
Desarrollo de cosenos

Desarrollo de senos



P1. *a*) Dada la función $f(x) = 1 - |x|$ calcule su serie de Fourier en $[-1, 1]$. Mencione por que esto es equivalente a que nos pidan su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$

b) Dada la función $f(x) = 2 - |x|$ calcule su serie de Fourier en $[0, 2]$, considerando a $f(x)$ una función periódica con $\mathcal{T} = 1$. Explique porque **no** es lo mismo que calcular la la expansión en senos o cosenos con $\mathcal{T} = 2$.



$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & 0 < x < 1 \\ -x & 0 > x \geq -1 \end{cases}$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{1} 2-x\,dx$$

$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + 2x - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} = \boxed{2}$$

$$\boxed{\frac{a_0}{2} = 1}$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} -x\cos(n\pi x)\,dx + \int_{0}^{1} (2-x)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$= \overset{0}{\underbrace{\cancel{\int_{-1}^{1} -x\cos(n\pi x)\,dx}}_{\text{impar}}} + 2\int_{0}^{1} \cos(n\pi x)\,dx$$

$$= 2\left(\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right)\Bigg|_0^1 = 0$$

$$b_n = \int_{-1}^{0} (-x)\sin(n\pi x)\,dx + \int_0^1 (2-x)\sin(n\pi x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-x)\sin(n\pi x)\,dx + \int_0^1 2\sin(n\pi x)\,dx$$

$$= -2\int_0^1 \underset{u}{x}\,\underbrace{\sin(n\pi x)\,dx}_{dv} + 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx$$

$$= -2\left(x\left(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \cancel{\left(-\cos(n\pi x)\right)dx} \right)$$

$$\cancel{x}\sin(n\pi x)\Big|_0^1 \Rightarrow 0$$

$$+ 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx$$

$$= (-2)\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + 2\left(\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 2\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}$$

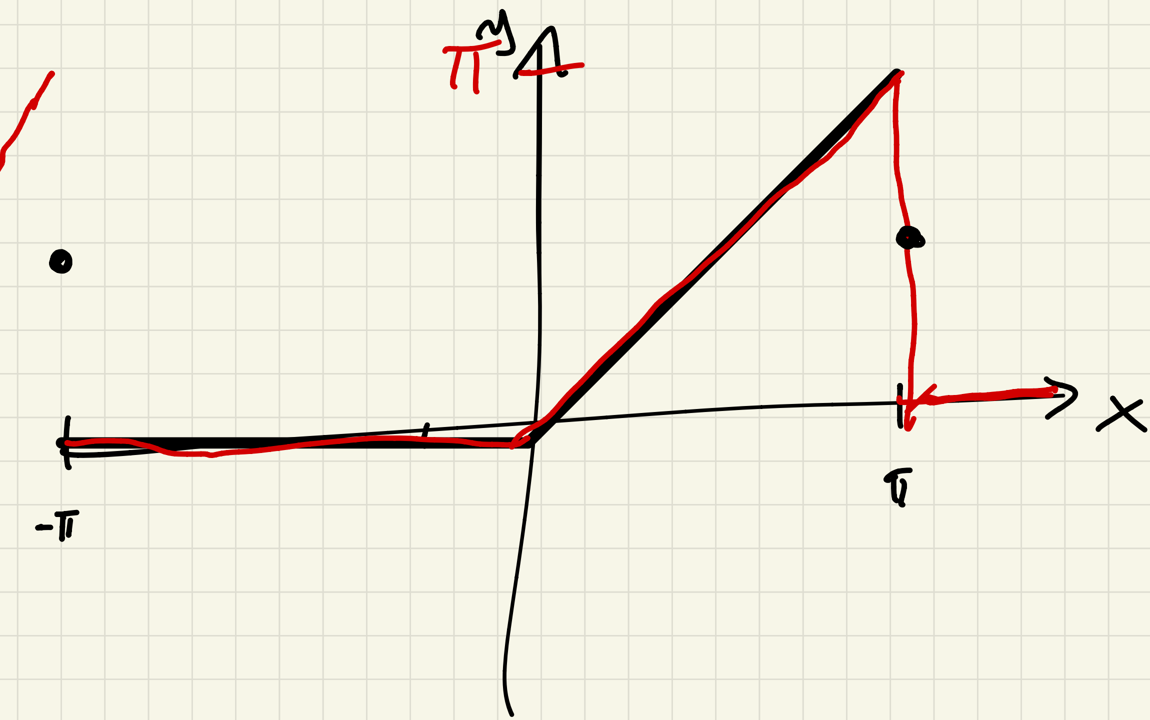
$$= \frac{2}{n\pi}$$

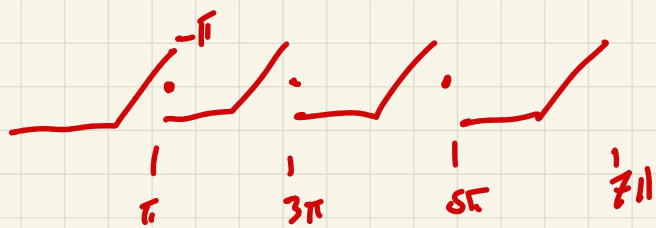
$$f(x) \approx 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n\pi x)$$

P2. Desarrolle en serie de Fourier la función $f(x) = 0$ si $-\pi < x < 0$ ó $f(x) = x$ si $0 < x < \pi$. Aplique el teorema de convergencia para deducir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Comente que valores toma $S_f(x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$





$T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 > x > -\pi \\ x & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{1}{\cancel{\pi}}\frac{\pi^{\cancel{2}}}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\cos(nx)\,dx}_{dv}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cancelto{0}{x\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^\pi} - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n}\,dx \right)$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{Si } n \text{ es par} \\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{\sin(nx)\,dx}_{dv}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\pi\,\frac{(-1)^n}{n} + \cancelto{0}{\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\,dx} \right)$$

$$x \sin(nx)\Big|_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$S_{f(x)} = \frac{\pi}{4} + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^{N+1}}{N} \sin(Nx) + \frac{(-2)\cos((2N-1)x)}{(2N-1)^2 \pi}$$

Cuando $S_f(x) = f(x)$

Con $x \in [-\pi, \pi]$

En $(-\pi, \pi)$ pues $f(x)$ es

Continua ... d

deducir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$f(0) = 0 = S_f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{(2N-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{(2N-1)^2}$$

$$S_f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & -\pi \\ 0 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{si } \pi > x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \pi \end{cases}$$

P3. Sea $0 < \delta < \infty$. Considere la función $1_{[-\delta,\delta]}(x) = 0$ si $|x| > \delta$ ó 1, para $|x| \leq \delta$

a) a) Demuestre que esta función es integrable y, luego, pruebe que $F(1_{[-\delta,\delta]})(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sin(\delta s)}{s}$

b) Se define la función $\Lambda(x)$ como $\Lambda(x) = 0$, si $|x| > 1$ ó $1 - |x|$, si $|x| \leq 1$ Pruebe que

$$(1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})(x) = \Lambda(x)$$

c) Concluya que $F(\Lambda)(s) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{sin^2(\frac{s}{2})}{s^2}$

Se Hizo en el Aux 9

Prop 1. [Identidad de Parseval] Sea $f \in C^1$, $2\pi-$periódica, tal que $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

a) Probar la identidad de Parseval:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

b) Deduzca que :

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2)$$

c) Pruebe la desigualdad de Wirtinger:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)dx$$

$$\underline{\int_0^{2\pi} f(x)\,dx} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx$$

$z = x - 2\pi$

$$= \int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{0} f(z+2\pi)\,dz$$

$$= \int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{0} f(z)\,dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0 = 0$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) + \cos(nx)\, a_n$$

$$f^2(x) = \sum_{n,j=1}^{\infty} b_n b_j \sin(jx)\sin(nx) +$$

$$b_n a_j \sin(nx)\cos(jx) +$$

$$a_n b_j \cos(nx) \sin(jx) +$$

$$a_n a_j \cos(nx) \cos(jx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n,j=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{aligned} & b_n b_j \sin(jx)\sin(nx) + \\ & b_n a_j \sin(nx)\cos(jx) + \\ & a_n b_j \cos(nx)\sin(jx) + \\ & a_n a_j \cos(nx)\cos(jx) \end{aligned} \; dx$$

Apunte $\rightarrow$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \ell & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \ell & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \pi + a_n^2 \pi$$

$f'(x)$ es 2π periodica

PDQ $f'(x+2\pi) = f'(x)$

$$f'(x+2\pi) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2\pi+h) - f(x+2\pi)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= f'(x)$$

$\Rightarrow f'$ es 2π periodica

$g(x) = f'(x)$ con

a_0' de $g(x)$

$$a_0' = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx$$

$$= f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f'(x)}_{dv}\, \underbrace{\sin(nx)}_{u}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\, \cancel{f(x)\sin(nx)}\Big|_{-\pi}^{\pi} {}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} n\, f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= -n a_n$$

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x)\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} n\, f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} f(\pi)\cos(n\pi) - \frac{1}{\pi} f(-\pi)\cos(-n\pi) + n b_n$$

$$= \frac{1}{\pi} f(\pi) \cancel{\left(\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)\right)}^{\to 0} + n b_n$$

$$\Rightarrow \quad a_0' = 0$$

$$a_n' = n b_n \quad \text{y} \quad b_n' = -n a_n$$

Formula de ⓐ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left({a_n'}^2 + {b_n'}^2 \right)$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$

c) $$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 - f(x)^2 dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(n^2 - 1)}_{\geq 0} \underbrace{(a_n^2 + b_n^2)}_{\geq 0}$$

$$\geq 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

Considerando f 2π- periódico

$d)$ Pruebe que se da la igualdad si y sólo si $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

Si $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

$\Rightarrow a_1 = a \quad , \quad b_1 = b \quad , \quad a_n = b_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

$a_0 = 0$

$f'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$

$\Rightarrow a_1 = b \quad , \quad b_1 = -a \quad , \quad a_n = b_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

$a_0 = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \pi(a^2 + b^2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx = \pi(a^2 + b^2)$$

✓

$\Rightarrow$ Si $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx$

$$\Rightarrow \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (n^2-1)(a_n^2 + b_n^2)}_{S} = 0$$

Si $\exists\, n_0 \geq 2 \in \mathbb{N}$ que $a_{n_0} \neq 0$

o $b_{n_0} \neq 0$

$$\Rightarrow \quad S \geq (n_0^2 - 1)(a_{n_0}^2 + b_{n_0}^2) > 0$$

$\Rightarrow \forall n \geq 2 \quad a_n = b_n = 0$

también por hipótesis $a_0 = 0$

Sea $f(x)$ [illegible] [illegible]

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$$