

## MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Alexis Fuentes

Auxiliares: Vicente Salinas

Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl



## Auxiliar 9: Transformadas de Fourier

26 de octubre de 2021

**P1.** Sea  $0 < \delta < \infty$ . Considere la función  $1_{[-\delta, \delta]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \delta \\ 0 & \text{si } |x| > \delta \end{cases}$

a) Demuestre que esta función es integrable y, luego, pruebe que  $F(1_{[-\delta, \delta]})(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\delta s)}{s}$

b) Se define la función  $\Lambda(x)$  como  $\Lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$

Pruebe que

$$\left(1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} * 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}\right)(x) = \Lambda(x)$$

c) Concluya que  $F(\Lambda)(s) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sin^2(\frac{s}{2})}{s^2}$

**P2.** Sea  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

a) Calcule la transformada de Fourier de  $f$

b) Encuentre una función  $g$  tal que  $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi^2}$ , puede dejarla expresada como una integral.

**P3.** a) Sea  $f(x) = e^{-ax}1_{x \geq 0}$ , pruebe que  $\hat{f}(x)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + is}$

b) Ahora calcule la transformada de  $g(x) = \begin{cases} e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^{5x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

**P4.** Sean  $a, b > 0$  considere la EDO

$$y'' + y = e^{-ax}1_{x \geq b}$$

Encuentre la solución en su forma integral sin transformadas.

### Resumen

Recuerden que la transformada es lineal

$$1. \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx$$

$$2. \check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(s) ds$$

$$3. \widehat{f'}(s) = is\hat{f}(s)$$

$$4. \widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \hat{f}(s)$$

$$5. g'(x) = -ix\check{g}(x)$$

$$6. g^{(k)}(x) = (-ix)^k \check{g}(x)$$

$$7. f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s) ds$$

$$8. \widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \hat{g}(s)$$

$$9. \widehat{f(x-x_0)}(s) = e^{-isx_0} \hat{f}(s)$$

$$10. \widehat{e^{is_0x} f(x)}(s) = \hat{f}(s-s_0)$$

$$11. \widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$12. \widehat{f(-x)}(s) = \hat{f}(-s)$$

	$f(x)$	$\hat{f}(s)$
1	$\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+is}$
2	$e^{-ax^2}, a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{s^2}{4a}}$
3	$e^{-a x }, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + s^2}$
4	$\frac{1}{a^2 + x^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} e^{-a s }$
5	$\begin{cases} k &  x  \leq b \\ 0 &  x  > b \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{\text{sen}(bs)}{s}$