MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 8: Series de Fourier

19 de octubre de 2021

P1. *a*) Dada la función $f(x) = 1 - |x|$ calcule su serie de Fourier en $[-1, 1]$. Mencione por que esto es equivalente a que nos pidan su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$

b) Dada la función $f(x) = 2 - |x|$ calcule su serie de Fourier en $[0, 2]$, considerando a $f(x)$ una función periódica con $\mathcal{T} = 1$. Explique porque **no** es lo mismo que calcular la la expansión en senos o cosenos con $\mathcal{T} = 2$.

P2. Desarrolle en serie de Fourier la función $f(x) = 0$ si $-\pi < x < 0$ ó $f(x) = x$ si $0 < x < \pi$.
Aplique el teorema de convergencia para deducir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Comente que valores toma $S_f(x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$

P3. Sea $0 < \delta < \infty$. Considere la función $1_{[-\delta,\delta]}(x) = 0$ si $|x| > \delta$ ó 1, para $|x| \le \delta$

a) a) Demuestre que esta función es integrable y, luego, pruebe que $F(1_{[-\delta,\delta]})(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{sin(\delta s)}{s}$

b) Se define la función $\Lambda(x)$ como $\Lambda(x) = 0$, si $|x| > 1$ ó $1 - |x|$, si $|x| \le 1$ Pruebe que

$$(1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})(x) = \Lambda(x)$$

c) Concluya que $F(\Lambda)(s) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{sin^2(\frac{s}{2})}{s^2}$

Propuestos

Prop 1. [Identidad de Parseval] Sea $f \in C^1$, $2\pi-$periódica, tal que $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

a) Probar la identidad de Parseval:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

b) Deduzca que :

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2)$$

c) Pruebe la desigualdad de Wirtinger:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx \ge \int_0^{2\pi} f^2(x)dx$$

d) Pruebe que se da la igualdad si y sólo si $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$

Resumen

Serie de Fourier

Sea $f : [-\mathcal{T}, \mathcal{T}] \to \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right], \quad \forall x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx$$

Convergencia

Nos interesa saber cuando la serie de Fourier converge a la función, o sea, si definimos:

$$S_f^N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right]$$

Y llamamos $S_f = \lim_{N\to\infty} S_f^N$ (si es que existe), entonces, ¿Cuándo $S_f = f$?

- Si f es de cuadrado integrable $(\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f^2(t)dt < \infty)$, Entonces S_f^N converge a f en media cuadrática: $\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} (f(x) - S_f^N)^2 dx \to 0$ cuando $N \to \infty$.
- Si f es continua por trozos en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ y con derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de $(-\mathcal{T}, \mathcal{T})$, don derivada por la izquierda en $x = \mathcal{T}$ y por la derecha en $x = -\mathcal{T}$, entonces $S_f^N(x)$ es convergente para cada $x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Y se tiene que:

$$S_f(\mathcal{T}) = S_f(-\mathcal{T}) = \frac{1}{2}[f(\mathcal{T}) + f(-\mathcal{T})]$$

  Si f es continua en x_0 entonces $S_f(x_0) = f(x_0)$ y si x_0 es un punto de discontinuidad entonces $S_f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$
- Si f es derivable en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ y $f(\mathcal{T}) = f(-\mathcal{T})$ entonces $f = S_f$ en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Si además f' es de cuadrado integrable, la convergencia de S_f^N hacia f es uniforme.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $2\mathcal{T}-$periódica de clase C^1 entonces $f = S_f$ en $\mathbb{R}$ y S_f^N converge uniformemente a f.

1. $\hat{f}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)dx$
2. $\check{g}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} g(s)ds$
3. $\widehat{f'}(s) = is\widehat{f}(s)$
4. $\widehat{f^{(k)}}(s) = (is)^k \widehat{f}(s)$
5. $g'(x) = -ix\check{g}(x)$
6. $g^{(k)}(x) = (-ix)^k \check{g}(x)$
7. $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds$
8. $\widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$