MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 7: Repaso y Series de Fourier

12 de octubre de 2021

P1. Sea $\Omega \subset R$ abierto y acotado. Recuerde porque los campos escalares $f, g \in C^2(\Omega)$. Cumplen la fórmula de integración por partes: $\int_{\Delta} gdV = \int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot ndA - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla gdV$

Sea A el conjunto $A = \{v \in C^2(\Omega) : \Delta v = 0 \text{ en}\Omega\}$, es decir A es el conjunto de todos los campos escalares armónicos en Ω. Dado $h \in C(\Omega)$ campo escalar fijo, para $v \in A$ definamos el operador $Q(v)$ mediante:

$$Q(v) = \int_{\partial\Omega} h\nabla v \cdot ndA \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dV$$

Suponga que $u \in A$ satisface $u = h$ sobre $\partial\Omega$. Muestre que para todo campo escalar $v \in A$ se tiene la siguiente igualdad:

$$Q(u) - Q(v) = \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dV$$

A partir de lo anterior deduzca el principio de Thompson: $Q(v) \leq Q(u) \forall v \in A$

P2. El propósito de este problema es calcular la integral de flujo del campo $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$ a través del manto del cilindro definido por las relaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad -h \leq z \leq h$$

orientado según $\hat{\rho}$. Para ello se usará el Teorema de la Divergencia sobre la región limitada por el manto del cilindro y el casquete esférico circunscrito al cilindro.

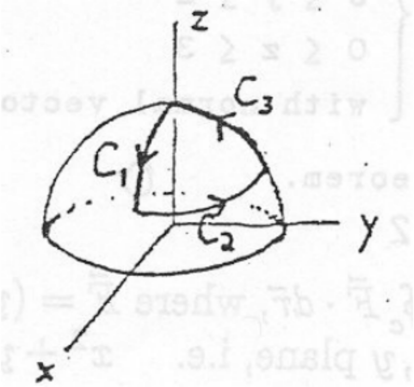
a) Calcule el radio de este casquete esférico.

b) Considere el volumen Ω limitado entre el casquete esférico y el cilindro. Calcule el rango de variación del ángulo ϕ al describir Ω en coordenadas esféricas.
Indicación: Exprese el resultado en términos del coseno de los ángulos extrémales.

c) Calcule $div(\vec{E})$ en Ω.

d) Concluya.

P3. Sea C la curva en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dada por tres curvas C_1, C_2 y C_3 como muestra la figura:



La curva C_1 está en el plano xz, la curva C_2 en $z = \sqrt{5}$ y la curva C_3 en el plano yz. Calcule la integral de trabajo del campo $\vec{F} = 2y\hat{\imath} + 3x\hat{\jmath} - z^2\hat{k}$ sobre la curva en la dirección indicada en la figura.

P4. [Cálculo de series]

Dada la función $f(x) = |x|$ calcule:

a) Su serie de Fourier en $[-1, 1]$

b) Su serie de Fourier en $[0, 2]$

c) Su desarrollo en serie de senos en $[0, 1]$

d) Su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$

Resumen

Serie de Fourier

Sea $f : [-\mathcal{T}, \mathcal{T}] \to \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right], \qquad \forall x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx, \qquad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx$$

Convergencia

Nos interesa saber cuando la serie de Fourier converge a la función, o sea, si definimos:

$$S_f^N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right]$$

Y llamamos $S_f = \lim\limits_{N\to\infty} S_f^N$ (si es que existe), entonces, ¿Cuándo $S_f = f$?

- Si f es de cuadrado integrable ($\displaystyle\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f^2(t)dt < \infty$), Entonces S_f^N converge a f en media cuadrática: $\displaystyle\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} (f(x) - S_f^N)^2 dx \to 0$ cuando $N \to \infty$.

- Si f es continua por trozos en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ y con derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de $(-\mathcal{T}, \mathcal{T})$, don derivada por la izquierda en $x = \mathcal{T}$ y por la derecha en $x = -\mathcal{T}$, entonces $S_f^N(x)$ es convergente para cada $x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Y se tiene que:

  $$S_f(\mathcal{T}) = S_f(-\mathcal{T}) = \frac{1}{2}[f(\mathcal{T}) + f(-\mathcal{T})]$$

  Si f es continua en x_0 entonces $S_f(x_0) = f(x_0)$ y si x_0 es un punto de discontinuidad entonces $S_f(x_0) = \dfrac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$

- Si f es derivable en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ y $f(\mathcal{T}) = f(-\mathcal{T})$ entonces $f = S_f$ en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Si además f' es de cuadrado integrable, la convergencia de S_f^N hacia f es uniforme.

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $2\mathcal{T}-$periódica de clase C^1 entonces $f = S_f$ en $\mathbb{R}$ y S_f^N converge uniformemente a f.

P1. Sea $\Omega \subset R$ abierto y acotado. Recuerde porque los campos escalares $f, g \in C^2(\Omega)$. Cumplen la fórmula de integración por partes: $\int_{\Delta}$ [illegible]$V = \int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot n dA - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV$

Sea A el conjunto $A = \{v \in C^2(\Omega) : \Delta v = 0 \text{ en}\Omega\}$, es decir A es el conjunto de todos los campos escalares armónicos en Ω. Dado $h \in C(\Omega)$ campo escalar fijo, para $\underline{v \in A}$ definamos el operador $Q(v)$ mediante:

$$Q(v) = \int_{\partial\Omega} 2h\nabla v \cdot n dA - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dV$$

Suponga que $\underline{u \in A}$ satisface $\underline{u = h \text{ sobre } \partial\Omega}$. Muestre que para todo campo escalar $v \in A$ se tiene la siguiente igualdad:

$$Q(u) - Q(v) = \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dV$$

A partir de lo anterior deduzca el principio de Thompson: $Q(v) \leq Q(u) \forall v \in A$

$$\int_{\Omega} f \Delta g \, dV = \int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot n \, dA - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dV$$

$$\int_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV = \int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot n \, dA$$

↖

$$\int_{\Omega} \mathrm{Div}(\vec{F}) \, dV = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot n \, dA$$

Tomando $\vec{F} = f \nabla g$

$$\boxed{\operatorname{Div}(f \nabla g) = f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g}$$

(Propuesto Verificarlo)

$$\int_{\Omega} f \Delta g \, dV = \int_{\partial \Omega} f \nabla g \cdot n \, dA - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dV$$

$$Q(u) - Q(v) = 2\int_{\partial \Omega} h \nabla u \cdot n \, dA - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dV$$

$$-2\int_{\partial \Omega} h \nabla v \cdot n \, dA + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dV$$

$$= 2\int_{\partial \Omega} h (\nabla u - \nabla v) \cdot n \, dA + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - |\nabla u|^2 \, dV$$

$$= \int_{\partial\Omega} u(\nabla u - \nabla v)\cdot n\, dA + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - |\nabla u|^2 dV$$

$$I_1 \overset{IPP}{=} 2\int_{\partial\Omega} u \nabla u \cdot n\, dA = \int_{\Omega} u \underbrace{\Delta u}_{\substack{6A \\ \text{es } 0}} dV + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV$$

$$= 2\int_{\Omega} |\nabla u|^2$$

$$I_2 \overset{IPP}{=} 2\int_{\partial\Omega} u \nabla v \quad = \int_{\Omega} u \underbrace{\Delta v}_{\text{es } 0} dV + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dV$$

$$= 2\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dV$$

Reemplazando

$$Q(u) - Q(v) = \cancel{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV - \cancel{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV +}$$

$$-2\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dV + \int |\nabla v|^2 dV$$

$$= \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dV$$

Pues $|\nabla u - \nabla v|^2 \geq 0 \Rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dV \geq 0$

$\Rightarrow \quad Q(v) \leq Q(u)$

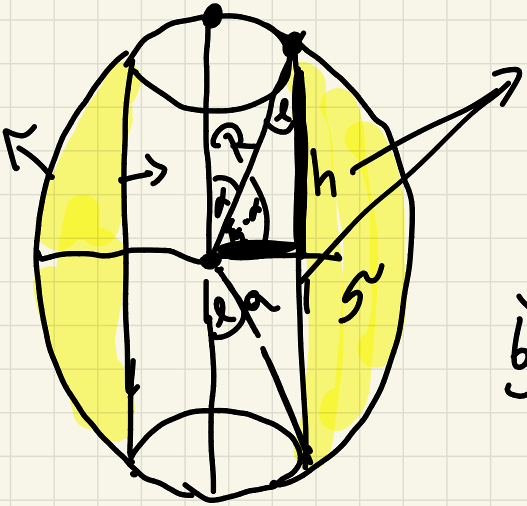
P2. El propósito de este problema es calcular la integral de flujo del campo $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r^2}$ a través del manto del cilindro definido por las relaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad -h \le z \le h$$

$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$

orientado según $\hat{\rho}$. Para ello se usará el Teorema de la Divergencia sobre la región limitada por el manto del cilindro y el casquete esférico circunscrito al cilindro.

- *a*) Calcule el radio de este casquete esférico.
- *b*) Considere el volumen Ω limitado entre el casquete esférico y el cilindro. Calcule el rango de variación del ángulo ϕ al describir Ω en coordenadas esféricas.
  Indicación: Exprese el resultado en términos del coseno de los ángulos extrémales.
- *c*) Calcule $div(\vec{E})$ en Ω.
- *d*) Concluya.



a)

$R = \sqrt{a^2 + h^2}$

Pitagoras

b) $\cos(\alpha) = \frac{h}{R}$

$\phi \in [\alpha, \pi - \alpha]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

c) $$\frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial (h_u h_v F_w)}{\partial w}\right)$$

$$\mathrm{Div}(E) = \frac{1}{r^2 \sin\phi}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \cancel{r^2}}\cancel{r^2}\sin\phi\right) + 0\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)\right) = 0$$

d) Se puede usar, pues $r=0 \notin \Omega$

S_1 Superficie Manto y S_2 Casquete$_\phi$

Gauss

$$\int_{\Omega} \underset{\overset{\parallel}{0}}{\mathrm{div}(E)}\, dV = \int_{S_1} E\cdot \underset{\overset{\downarrow}{(\hat{\rho})}}{\hat{n}_{Ext}}\, dA + \int_{S_2} E \underset{\overset{\searrow}{(\hat{r})}}{\hat{n}_{Ext}}\, dA$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{S_1} E \cdot \hat{\rho}\, dA}_{\text{Esto nos piden}} = \int_{S_2} E \cdot \hat{r}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \cancel{r^2}} \hat{r} \cdot \hat{r}\, \cancel{r^2} \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{Q}{2\varepsilon_0} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin(\phi)\, d\phi$$

$$= \frac{Q}{2\varepsilon_0} \left(-\cos(\phi)\right)\Big|_{\alpha}^{\pi-\alpha}$$

$$\boxed{\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)}$$

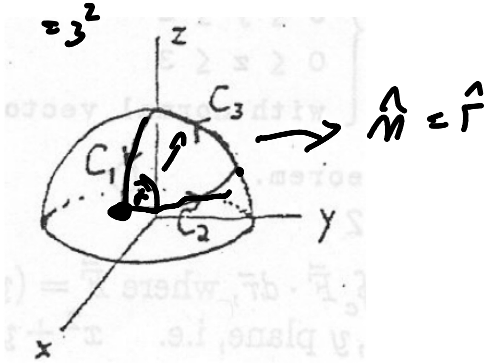
$$= \frac{Q}{\varepsilon_0} \cos(\alpha)$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+1}}$$

Si $h \to \infty$

$$\Rightarrow \quad = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

P3. Sea C la curva en la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ dada por tres curvas C_1, C_2 y C_3 como muestra la figura:



La curva C_1 está en el plano xz, la curva C_2 en $z=\sqrt{5}$ y la curva C_3 en el plano yz. Calcule la integral de trabajo del campo $\vec{F} = 2y\hat{\imath} + 3x\hat{\jmath} - z^2\hat{k}$ sobre la curva en la dirección indicada en la figura.

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = (0-0)\hat{\imath} + (0-0)\hat{\jmath} + (3-2)\hat{k}$$

$$= \hat{k}$$

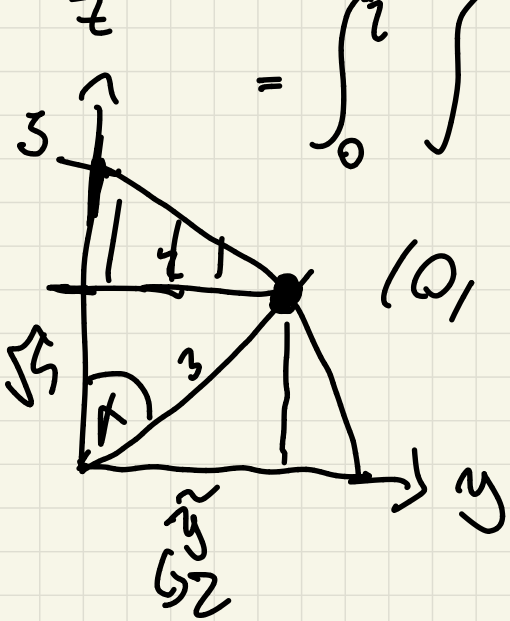
$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_A \hat{k} \cdot \hat{r} \, dA \quad , A \text{ porción de esfera}$$

$$\hat{r} = (\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$$

$$= \int_A \cos\varphi \, dA$$

$$= \int_A \cos\varphi \cdot 3^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int \cos\varphi \, \sin\varphi \; 9 \, d\varphi \, d\theta$$



$(0, \tilde{y}, \sqrt{5}) \in$ esfera R_3

$\tan(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\alpha = \text{ArcTan}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\tilde{y}^2 + 5 = 9$

$\boxed{\tilde{y} = 2}$

$\sin(\alpha) = \frac{2}{3}$

$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 9 \int_0^{\alpha} 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{9\pi}{4} \int_0^{\alpha} \sin(2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{9\pi}{8} \left(-\cos(2\varphi) \Big|_0^{\alpha} \right)$$

$$= \frac{9\pi}{4} \left(\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \right)$$

$$= \frac{9\pi}{4} \left(\sin(\alpha)^2 \right) = \frac{9\pi}{4} \cdot \frac{4}{9}$$

$$= \boxed{\pi}$$

P4. [Cálculo de series]

Dada la función $f(x) = |x|$ calcule:

- *a)* Su serie de Fourier en $[-1, 1]$
- ~~*b)* Su serie de Fourier en $[-2, 2]$~~
- *c)* Su desarrollo en serie de senos en $[0, 1]$
- *d)* Su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$

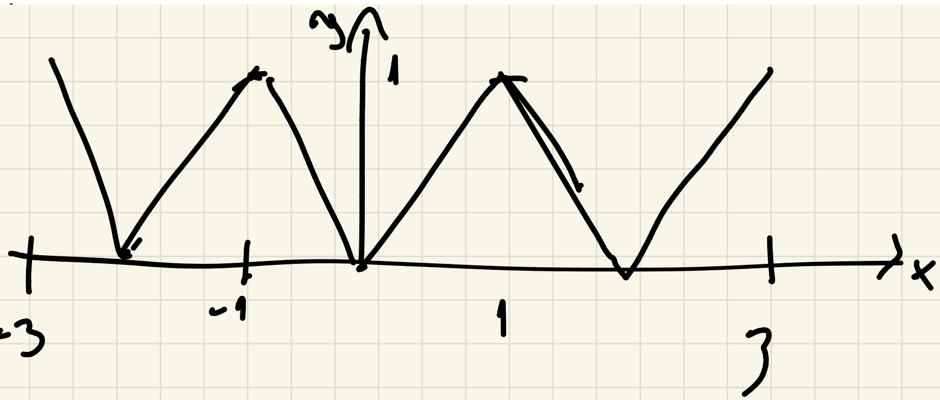
Serie de Fourier

Sea $f : [-\mathcal{T}, \mathcal{T}] \to \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ si existen escalare $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right], \quad \forall x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx$$

a)



$\mathcal{T} = \underline{1}$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

$a_0 = \underline{1}$

$$a_N = \int_{-1}^{1} |x| \, Cos(N\pi x) dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{2x}_{u} \underbrace{\cos(n\pi x)dx}_{dv}$$

$$= \left(2x \cdot \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x)dx \right)$$

$$= \frac{2}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x) \Big|_0^1$$

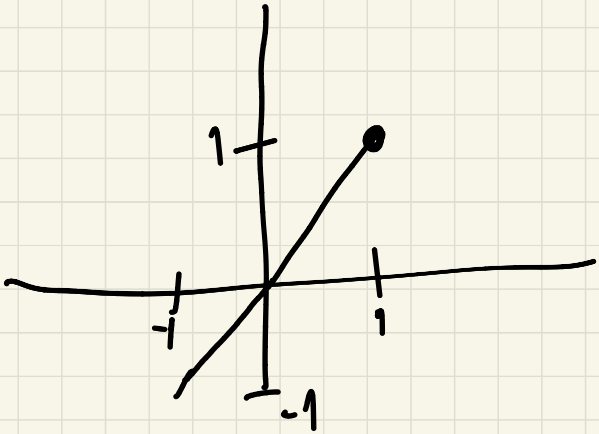
$$= \frac{2}{(n\pi)^2} \left(\cos(n\pi) - 1 \right) = \frac{8}{n^2\pi^2} \left((-1)^n - 1 \right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi^2} & \text{Si } n = 2k-1 \\ 0 & \text{Si } n = 2k \end{cases}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} \underbrace{|x|}_{par} \underbrace{\sin(n\pi x)}_{impar} \, dx = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-4)}{(2X-1)^2 \pi^2} \cos((2K-1)\pi x)$$

c) Hacer aproximación asumiendo f impar (par) si es de senos (cosenos)



A,lTico $a_N = 0$, $\forall N \geq 0$ $\quad \int_{-1}^{1} \cancel{f(x)\cos(n\pi x)} \to 0$

$$b_n = \int_{0}^{1} \frac{2X}{u} \underbrace{\sin(n\pi x)}_{dr} \, dx$$

$$= 2x \cdot \left(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 2\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx$$

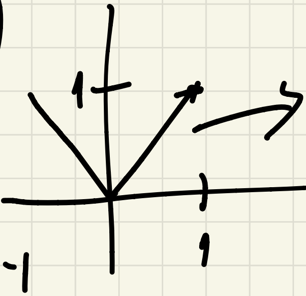
$$= -2\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^2}\cancelto{0}{\sin(n\pi x)\Big|_0^1}$$

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x)$$

$$\tilde{f}(x)\Big|_{-1}^{1} = x$$

d)



$f(x) = |x|$ es idéntico a

a)