MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 7: Repaso y Series de Fourier

12 de octubre de 2021

P1. Sea $\Omega \subset R$ abierto y acotado. Recuerde porque los campos escalares $f, g \in C^2(\Omega)$.
Cumplen la fórmula de integración por partes: $\int_{\Delta} g dV = \int_{\partial\Omega} f\nabla g \cdot n dA - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV$
Sea A el conjunto $A = \{v \in C^2(\Omega) : \Delta v = 0 \text{ en}\Omega\}$, es decir A es el conjunto de todos los campos escalares armónicos en Ω. Dado $h \in C(\Omega)$ campo escalar fijo, para $v \in A$ definamos el operador $Q(v)$ mediante:

$$Q(v) = \int_{\partial\Omega} h\nabla v \cdot n dA \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dV$$

Suponga que $u \in A$ satisface $u = h$ sobre $\partial\Omega$. Muestre que para todo campo escalar $v \in A$ se tiene la siguiente igualdad:

$$Q(u) - Q(v) = \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^2 dV$$

A partir de lo anterior deduzca el principio de Thompson: $Q(v) \leq Q(u) \forall v \in A$

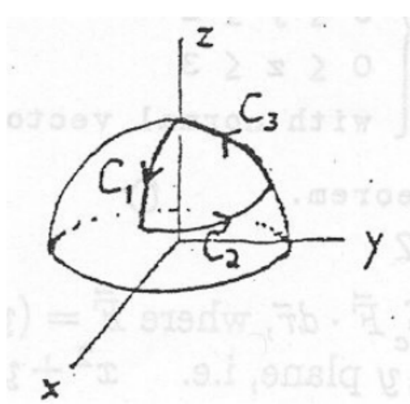
P2. El propósito de este problema es calcular la integral de flujo del campo $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$ a través del manto del cilindro definido por las relaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad -h \leq z \leq h$$

orientado según $\hat{\rho}$. Para ello se usará el Teorema de la Divergencia sobre la región limitada por el manto del cilindro y el casquete esférico circunscrito al cilindro.

a) Calcule el radio de este casquete esférico.
b) Considere el volumen Ω limitado entre el casquete esférico y el cilindro. Calcule el rango de variación del ángulo ϕ al describir Ω en coordenadas esféricas.
Indicación: Exprese el resultado en términos del coseno de los ángulos extrémales.
c) Calcule $div(\vec{E})$ en Ω.
d) Concluya.

P3. Sea C la curva en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dada por tres curvas C_1, C_2 y C_3 como muestra la figura:



La curva C_1 está en el plano xz, la curva C_2 en $z = \sqrt{5}$ y la curva C_3 en el plano yz. Calcule la integral de trabajo del campo $\vec{F} = 2y\hat{\imath} + 3x\hat{\jmath} - z^2\hat{k}$ sobre la curva en la dirección indicada en la figura.

P4. [Cálculo de series]

Dada la función $f(x) = |x|$ calcule:

a) Su serie de Fourier en $[-1, 1]$

b) Su serie de Fourier en $[0, 2]$

c) Su desarrollo en serie de senos en $[0, 1]$

d) Su desarrollo en serie de cosenos en $[0, 1]$

Resumen

Serie de Fourier

Sea $f : [-\mathcal{T}, \mathcal{T}] \to \mathbb{R}$. Diremos que f admite un desarrollo en *Serie de Fourier* en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ si existen escalares $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right], \qquad \forall x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$$

$$a_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx, \qquad b_n = \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) dx$$

Convergencia

Nos interesa saber cuando la serie de Fourier converge a la función, o sea, si definimos:

$$S_f^N = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\mathcal{T}}\right) \right]$$

Y llamamos $S_f = \lim\limits_{N\to\infty} S_f^N$ (si es que existe), entonces, ¿Cuándo $S_f = f$?

- Si f es de cuadrado integrable ($\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} f^2(t)dt < \infty$), Entonces S_f^N converge a f en media cuadrática: $\int_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{T}} (f(x) - S_f^N)^2 dx \to 0$ cuando $N \to \infty$.

- Si f es continua por trozos en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ y con derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de $(-\mathcal{T}, \mathcal{T})$, don derivada por la izquierda en $x = \mathcal{T}$ y por la derecha en $x = -\mathcal{T}$, entonces $S_f^N(x)$ es convergente para cada $x \in [-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Y se tiene que:

  $$S_f(\mathcal{T}) = S_f(-\mathcal{T}) = \frac{1}{2}[f(\mathcal{T}) + f(-\mathcal{T})]$$

  Si f es continua en x_0 entonces $S_f(x_0) = f(x_0)$ y si x_0 es un punto de discontinuidad entonces $S_f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$

- Si f es derivable en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$ y $f(\mathcal{T}) = f(-\mathcal{T})$ entonces $f = S_f$ en $[-\mathcal{T}, \mathcal{T}]$. Si además f' es de cuadrado integrable, la convergencia de S_f^N hacia f es uniforme.

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $2\mathcal{T}-$periódica de clase C^1 entonces $f = S_f$ en $\mathbb{R}$ y S_f^N converge uniformemente a f.