

MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Alexis Fuentes

Auxiliares: Vicente Salinas

Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl



Auxiliar 6: Teorema de Stokes

5 de octubre de 2021

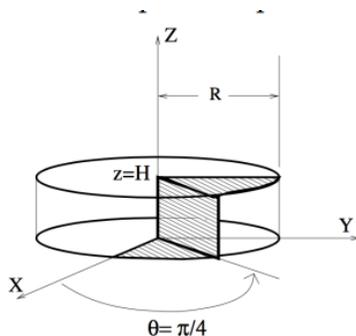
P1. [Stoke al límite]

Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar $z = x^2 + y^2$ con la parte superior de la superficie de la esfera unitaria, Considere Γ recorrida en antihorario.

- Calcule la integral de trabajo de $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{i} + (y^2 + x)\hat{j} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ .
- Sea ahora $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$. Pruebe que $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ si $\rho > 0$, pero que sin embargo $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción del Teorema de Stokes.

P2. La superficie S corresponde a la unión de 3 pedazos, como se muestra en la siguiente figura, orientada de modo que la normal de sector circular superior apunte hacia arriba. Se define $F = \rho^2\hat{z} + z\rho\hat{\rho}$.

- Usando la definición de integral de trabajo, calcule la circulación $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \vec{r}$
- Calcule la misma circulación, pero utilizando el Teorema de Stokes.



P3. Considere el siguiente campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y - 3z + e^x \sin(z))\hat{i} + x^2\hat{j} + (e^x \cos(z) - 3x)\hat{k}$$

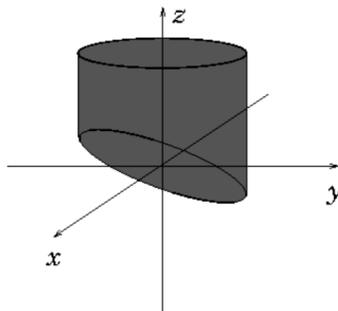
- Calcule $\text{rot}(\vec{F})$.
- Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) \quad t \in [0, 2\pi],$$

y calcule

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Indicación: Note que Γ es el borde inferior de la porción del cilindro de la siguiente figura:



P4. [Aplicación de Stokes]

a) Deduzca el teorema de Green en el plano, para esto considere $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y)\hat{i} + F_2(x, y)\hat{j}$ de clase C^1 .

b) Demuestre que:

$$\text{Área}(S) = \frac{1}{2} \int_{\partial S} xdy - ydx$$

c) Sea $a > 0$, calcule el área de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, usando la parametrización:

$$x = a \cos^3(t) \qquad y = a \sin^3(t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Resumen

Teorema del rotor de Stokes Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido sobre un abierto U que incluye la superficie S y su borde ∂S . Sea finalmente $\hat{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S y supongamos que la curva cerrada ∂S es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal \hat{n} , es decir, respetando la regla de la mano derecha, entonces

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

Teorema de Green en el plano Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada tal que su frontera ∂S es una curva simple, cerrada y regular por pedazos, orientada en el sentido antihorario. Consideremos dos campos escalares $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$, ambos de clase C^1 en un abierto que contiene a S y ∂S , entonces

$$\int_{\partial S} Mdx + Ndy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$