MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Resumenes Auxiliares

Norma euclidiana de un vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \in R^n$: $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...x_i^2 + .. + x_n^2}$

Una curva Γ es:
1) **Suave:** Si admite una parametrización de clase C^1.
2) **Regular:** Si admite una parametrización $\overrightarrow{r}(t)$ de clase C^1 tal que $\|\frac{dr(t)}{dt}\| > 0$, $\forall t \in [a, b]$.
3) **Simple:** Si admite una parametrización de clase C^1 que sea inyectiva.
4) **Cerrada:** Si admite una parametrización $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que: $r(a) - r(b) = 0$.
5) **Cerrada simple:** Si admite una parametrización $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $r(a) = r(b)$ y que sea inyectiva sobre $[a, b)$.

Sea Γ una curva simple y regular y $\overrightarrow{r}(t)$ regular. Definimos la función longitud de arco $s : [a, b] \to [0, L(\Gamma)]$ como:

$$s(t) := \int_a^t \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}} \right\| d\hat{t}$$

Observación: El caso de $t = b$, entrega exactamente la longitud de curva entre $\overrightarrow{r}(a)$ y $\overrightarrow{r}(b)$.

Integral de Linea Sea $F : \omega \subset R^n \to R^n$ y sea $\Gamma \subset \Omega$, una curva con una parametrización simple y regular $r(t)$, con $t \in [a, b]$, se defina la integral de linea sobre Γ como:

$$\int_\Gamma F := \int_a^b F(r(\hat{t})) \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}} \right\| d\hat{t}$$

Integral de trabajo de un campo $\overrightarrow{F}$ sobre una curva:
Sea Γ una curva simple y regular en $\mathbb{R}^3$, y sea $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función continua. Se define la integral de F sobre la curva Γ, donde $\overrightarrow{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de Γ. mediante:

$$W = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} := \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} dt$$

Coordenadas Cilíndricas: $T(\rho, \theta, k) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), k)$ y los factores $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_k = 1$

Coordenadas Esféricas: $T(r, \phi, \theta) = (r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi))$ y los factores $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin(\phi)$ y $h_\phi = r$.

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial w_j} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_j^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial w_j} \right) \right]$$

$$rotF = \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v)\right]\hat{u} + \frac{1}{h_u h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u) - \frac{\partial}{\partial u}(F_w h_w)\right]\hat{v} + \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_v h_v) - \frac{\partial}{\partial v}(F_u h_u)\right]\hat{w}$$

Sea S una superficie parametrizada por $\phi(u, v) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Definimos el vector normal a la superficie por $\hat{n}\frac{\partial_u \phi \times \partial_v \phi}{||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||}$.

Un punto en la superficie se dice regular si los los vectores tangentes en las direcciones u, v no son nulos ni paralelos, ie, su producto vectorial no es nulo, ie, el vector normal no es nulo.

El área de la superficie S viene dada por:

$$A(S) \iint_S dS = \iint_D ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| dudv$$

Donde $dS = ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| dudv$.

La integral de f sobre la superficie S viene dada por:

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\phi(u, v)) ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| dudv$$

La integral de flujo de $\vec{F}$ sobre la superficie S viene dada por:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F}(\phi(u, v)) \cdot [\partial_u \phi \times \partial_v \phi] (u, v) dudv$$

Donde (u, v) significa que está siendo evaluada dicha función.

Teorema del rotor de Stokes Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una supercie orientable y regular por pedazos, cuyo borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido sobre un abierto U que incluye la supercie S y su borde ∂S. Sea nalmente $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S y supongamos que la curva cerrada ∂S es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal ˆ $\hat{n}$, es decir, respetando la regla de la mano derecha, entonces

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

Teorema de Green en el plano Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada tal que su frontera ∂S es una curva simple, cerrada y regular por pedazos, orientada en el sentido antihorario. Consideremos dos campos escalares $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$, ambos de clase C^1 en un abierto que contiene a S y ∂S, entonces

$$\int_{\partial S} M dx + N dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$