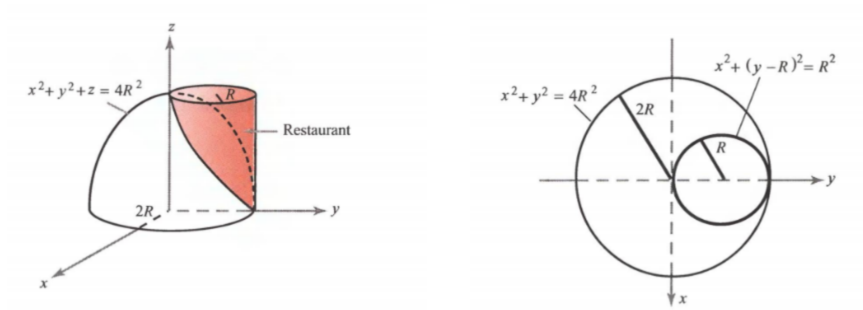
MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 5: Integral de Flujo y Teorema de la divergencia

23 de Octubre del 2018

P1. [Superficie]

Están construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. Los planos del arquitecto se muestran a continuación:



Vista lateral **Vista superior**

a) Parametrice la superficie del restaurante. Considere R como conocido.

b) La pared vertical curvada del restaurante será hecha de vidrio. ¿Cuánto vidrio se necesitará? Es decir, ¿cuál será el área de esta pared?

P2. [Integral de Flujo]

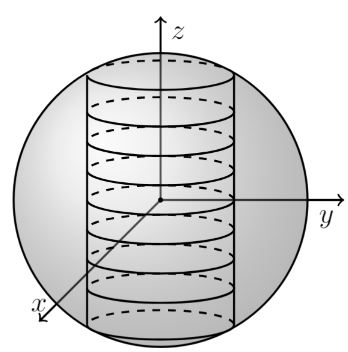
Un fluido se somete al campo de velocidades

$$\vec{V}(x,y,z) = (x - yz)\hat{\imath} + (y + xz)\hat{\jmath} + (z + 2xy)\hat{z}$$

.

Sea S_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Calcule $\iint_{S_1} \vec{V} \cdot \hat{n} dA$ con $\hat{n}$ normal interior del cilindro.



P3. Confirme el teorema de Gauss para $S \subset \mathbb{R}^3\{[0,1]^3\}$ con el campo $\vec{F}(x,y,z)x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$.

P4. [Gauss al límite]

De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón y tienen como potencial a $U(r) = K\dfrac{e^{-\alpha r}}{r}$ en coordenadas esféricas, para cierta constante $K < 0$ y $\alpha > 0$.

a) Encuentre la fuerza $F = -\nabla U$, en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

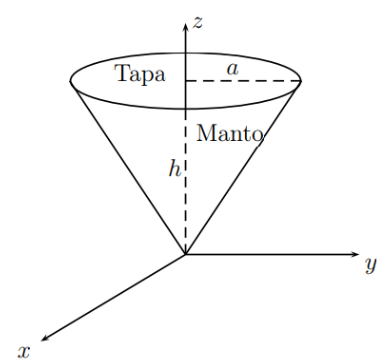
b) Calcule directamente el flujo a través de un casquete esférico de radio a ($a > 0$), orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$, en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

d) Demuestre que si Ω es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

Recordar mirar clase 10, problema [Flujos en caras restantes]: Se desea calcular el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F} = -\hat{k}$ a través del manto (sin la tapa) del cono invertido de radio a y altura h que se muestra en la siguiente figura:



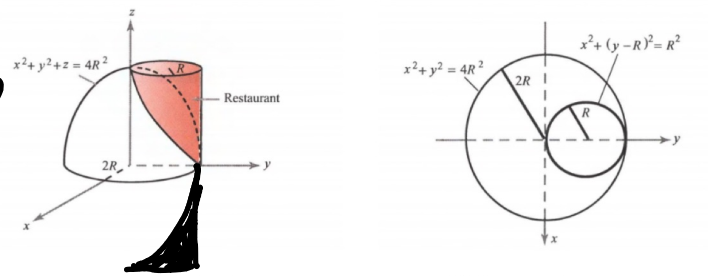
Pues en este tipo de problemas se utiliza Gauss para calcular de manera más sencilla una integral de flujo.

$$\int_{\text{Manto}} \vec{F} + \int_{\text{Tapa}} \vec{F} = \int_{\text{Volumen}} \text{div}$$

P1. [Superficie]

Están construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. Los planos del arquitecto se muestran a continuación:

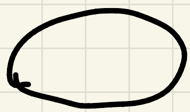
$z = R^2 \cdot 4$



Vista lateral **Vista superior**

a) Parametrice la superficie del restaurante. Considere R como conocido.

b) La pared vertical curvada del restaurante será hecha de vidrio. ¿Cuánto vidrio se necesitará? Es decir, ¿cuál será el área de esta pared?

a) $S_1 \longrightarrow$  Techo

$S_2 \longrightarrow$  Pared

$S_3 \rightarrow$  Suelo

$$S_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta + R \\ z = h \end{array} \right\}$$

$h = 4R^2$ $\quad r \in [0,R],\ \theta \in [0,2\pi]$

$\boxed{S_2}$ $\{x^2+(y-R)^2=R^2\} \cap \{x^2+y^2+z \geq 4R^2\}$

$$\left\{(x,y,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta + R \\ 4R^2 \geq z \geq 4R^2 - (R\cos\theta)^2 - R^2(\sin\theta+1)^2 \\ z \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{(x,y,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta + R \\ 4R^2 \geq z \geq 2R^2(1-\sin\theta) \end{array} \right\}$$

$$\left\{(x,y,z) \;\middle|\; \begin{array}{ll} x = R\cos\theta & z = h \\ y = R\sin\theta + R & \\ 2R^2(1-\sin\theta) \leq h \leq 4R^2 & \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi & \end{array} \right\}$$

S_3] $\{x^2+y^2+z=4R^2\} \cap \{x^2+(y-R)^2 \leq R^2\}$

$x = r\cos\theta$ $\quad r \in [0, R]$

$y = r\sin\theta + R$ $\quad \theta \in [0, 2\pi]$

$z = 3R^2 - r^2 - 2rR\sin\theta = h$

b) $A = \iint_{S_2} \|m\| \, dS$

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \begin{array}{l} x = R\cos\theta \quad z = h \\ y = R\sin\theta + R \\ 2R^2(1-\sin\theta) \leq h \leq 4R^2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\}$$

$\varphi(\theta, h) = (R\cos\theta, R\sin\theta + R, h)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-R\sin\theta, R\cos\theta, 0)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial h} = (0, 0, 1)$

$$
\begin{array}{ccccc}
\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} & \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\
-R\sin\theta & R\cos\theta & 0 & -R\sin & R\cos \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

$$\vec{n} = (R\cos\theta, R\sin\theta, 0)$$

$$\|\vec{n}\| = R$$

$$\Rightarrow A = \int_0^{2\pi} \int_{2R^2(1-\sin\theta)}^{4R^2} R \, dh \, d\theta$$

$$= R \int_0^{2\pi} 4R^2 - 2R^2 - 2R^2\sin\theta \, d\theta$$

$$= 2R^3 \int_0^{2\pi} (1 - \sin\theta) \, d\theta$$

$$= \boxed{4R^3\pi}$$

P2. **[Integral de Flujo]**

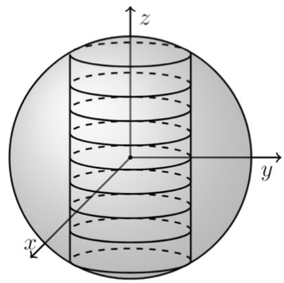
Un fluido se somete al campo de velocidades

$$\vec{V}(x,y,z) = (x - yz)\hat{\imath} + (y + xz)\hat{\jmath} + (z + 2xy)\hat{z}$$

.

Sea S_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Calcule $\iint_{S_1} \vec{V} \cdot \hat{n} dA$ con $\hat{n}$ normal interior del cilindro.



$$\{x^2+y^2=2\} \cap \{x^2+y^2+z^2 \le 4\}$$

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \\ -\sqrt{2} \le z \le \sqrt{2} \end{array}\right\}$$

$$z^2 \le 2$$

$$\varphi(\theta,z) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = (-\sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\cos\theta, 0)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{n} = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, 0)$$

$$\hat{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\vec{F} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta\, z \\ \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta\, z \\ \text{Algo.} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta\, dz$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cos^2\theta - \cancel{\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\, z} + \sqrt{2}\sin^2\theta + \cancel{\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta\, z}$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, d\theta\, dz$$

$$= \big((2\pi)(2\sqrt{2})(\sqrt{2})\big) = \boxed{8\pi}$$

P3. Confirme el teorema de Gauss para $S \subset \mathbb{R}^3\{[0,1]^3\}$ con el campo $\vec{F}(x,y,z)x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$.

Verificar $$\int_V \operatorname{div}(F)\, dV = \int_S \vec{F} \cdot dS$$

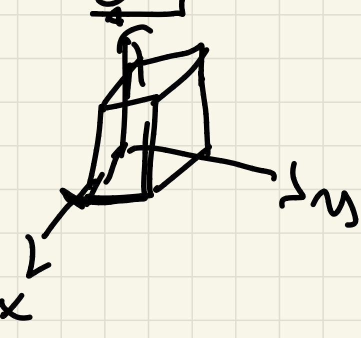
$$\operatorname{div}(F) = 2x + 0 + 2z =$$

$$\vec{F} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2x + 2z \, dx\, dy\, dz$$

$$\vec{F} = \int_0^1 \int_0^1 1 + 2z \, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 1 + 2z\, dz = 1 + z^2\Big|_0^1 = \boxed{2}$$

$\boxed{S1}$ $z=1$ $\boxed{S2}$ $z=0$



$\boxed{S1} \Rightarrow \hat{n} = \hat{k}$

$\boxed{z=1}$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + \underline{1}\hat{k}) \cdot \hat{k} \, dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 1 \, dx\,dy = \boxed{1}$$

$\boxed{S_2} \quad \hat{n} = -\hat{k}$

$\boxed{z=0}$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + 0\hat{k}) \cdot (-\hat{k}) \, dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 0 \, dx\,dy = \boxed{0}$$

$\boxed{S_3} \Rightarrow \hat{n} = \hat{\imath}$

$\boxed{x=1}$

$$\int_0^1 \int_0^1 (1\hat{\imath} + 1\hat{\jmath} + z\hat{k}) \cdot \hat{\imath} \, dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 1 \, dy\,dz = \boxed{1}$$

$\boxed{S_4}$ $\hat{n} = -\hat{\imath}$

$\boxed{x=0}$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{(0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + z\hat{k}) \cdot (-\hat{\imath})}_{0}\, dy\, dz = 0$$

$\boxed{S_5}$ $\hat{n} = \hat{\jmath}$

$\boxed{y=1}$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}) \cdot \hat{\jmath}\, dx\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2\, dx\, dz$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 dz = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$\boxed{S_6}$ $n = -\hat{\jmath}$

$\boxed{y=0}$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k})(-\hat{\jmath})\, dx\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 -x^2\, dx\, dz = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = 2}$ Se prueba

P4. [Gauss al límite]

De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón y tienen como potencial a $U(r) = K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ en coordenadas esféricas, para cierta constante $K < 0$ y $\alpha > 0$.

a) Encuentre la fuerza $F = -\nabla U$, en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

b) Calcule directamente el flujo a través de un casquete esférico de radio a ($a > 0$), orientado según la normal exterior. $\hat{r}$

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$, en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

d) Demuestre que si Ω es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

a) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}$

$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right)$

$\boxed{\text{S: } f = f(r)}$

$$= -\frac{\partial}{\partial r}\left(K e^{-\alpha r} \cdot r^{-1}\right)\hat{r}$$

$$= -K\left((-\alpha)\frac{e^{-\alpha r}}{r} + (-1)\, e^{-\alpha r} r^{-2}\right)\hat{r}$$

$$= \frac{K}{r^2} e^{-\alpha r}\left(\alpha r + 1\right)\hat{r}$$

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} e^{-\alpha r} (\alpha r + 1)\, \hat{r}$$

$\boxed{r = a}$

$$Fl_{y_0} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\varphi\, d\theta \qquad A = r^2 \sin\varphi\, \hat{r}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} K e^{-\alpha a} (\alpha a + 1) \sin\varphi \quad d\varphi\, d\theta$$

$$= \boxed{4\pi K e^{-\alpha a} (\alpha a + 1)}$$

---

c) $-r^2 \frac{\partial f}{\partial r} = K e^{-\alpha r} (\alpha r + 1)$

$$\Rightarrow -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(\begin{aligned} &(-\alpha) K e^{-\alpha r} (\alpha r + 1) \\ &+ \alpha K e^{-\alpha r} (1) \end{aligned} \right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(-\alpha^2 r K e^{-\alpha r}\right)$$

$$= -\frac{\alpha^2}{r} K e^{-\alpha r}$$

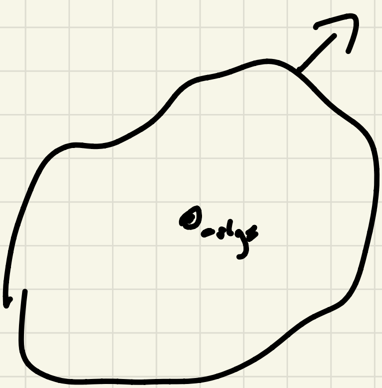
$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = -\alpha^2 U$$

$$\Rightarrow \Delta U = \alpha^2 U$$

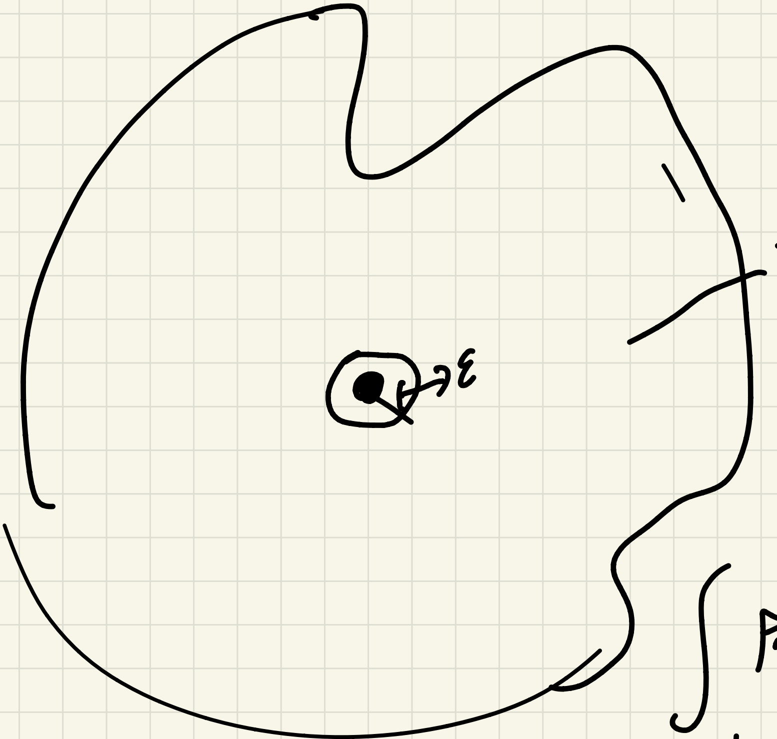
d) Porque no se puede aplicar Gauss directamente

Gauss

$$\cancel{\int_{\partial\Omega} F\cdot d\vec{s} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(F)\, dV}$$



por el origen



$$\to \Omega' = \Omega \setminus \{0\}$$

$$\int_{\partial\Omega'} F\cdot d\vec{S} = \int_{\Omega'} \operatorname{div}(F)\,dV$$

$$\int_{\partial\Omega'} F\cdot d\vec{S} \overset{\text{Ignore}}{=} \int_{\partial\Omega} F\cdot dS + \int_{B(0,\varepsilon)} F\cdot(-\hat{r})\,dS$$

$$\int_{\partial\Omega'} F\cdot d\vec{S} \overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\Omega'} \operatorname{div}(F)\,dV$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} F \cdot dS = \int_{\partial\Omega'} F \cdot dS + \int_{\partial B(0,\epsilon)} F \cdot (r^2 \sin\varphi)\hat{r}\, dS$$

$$= \int_{\Omega'} \mathrm{div}(F)\, dV + \int_{\partial B(0,\epsilon)} F \cdot (r^2 \sin\varphi)\hat{r}\, d$$

$$= \int_{\Omega} \mathrm{div}(F)\, dV + \int_{\partial B(0,\epsilon)} F \cdot (r^2 \sin\varphi\, \hat{r})\, dS$$

$$- \int_{B(0,\epsilon)} \mathrm{div}(F)\, dV$$

$\boxed{\operatorname{div}(-\nabla U) = -\Delta U}$

$$= -\alpha^2 \int_{\Omega} U\,dV + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{K}{r^2} e^{-\alpha r} (\alpha r + 1)\, \hat{r} \cdot \varepsilon^2 \sin\varphi\, dS$$

$$- \int_{B(0,\varepsilon)} (-\alpha^2 U)\, dV$$

$$= -\alpha^2 \int_{\Omega} U\,dV + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} K e^{-\alpha\varepsilon} (\alpha\varepsilon + 1) \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$+ \alpha^2 \int_0^{\varepsilon} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-\alpha r} \frac{K}{\cancel{r}}\, r^{\cancel{2}} \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= -\alpha^2 \int_{\Omega} U\,dV + 2\pi K e^{-\alpha\varepsilon} (\alpha\varepsilon + 1)$$

$$+ 2\pi K \alpha^2 \int_0^{\varepsilon} e^{-\alpha r}\, r\, dr$$

$$= -\alpha^2 \int_\Omega V \, dV + 4\pi K e^{-\alpha\varepsilon}(\alpha\varepsilon + 1) + Al_{g\varepsilon}$$

$$\left| \int_0^\varepsilon e^{-\alpha r} r \, dr \right| < \int_0^\varepsilon r \, dr = \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Lim $\varepsilon \to 0$

$$= \boxed{-\alpha^2 \int_\Omega V dV + 4\pi K}$$