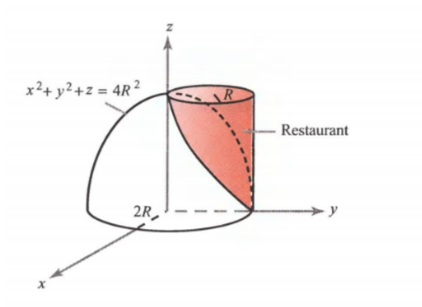
MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 5: Integral de Flujo y Teorema de la divergencia

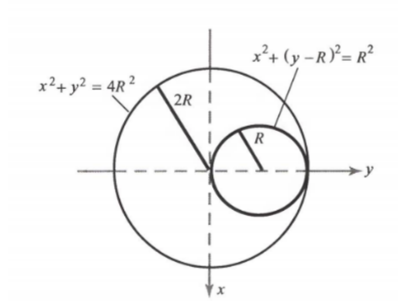
23 de Octubre del 2018

P1. [Superficie]

Están construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. Los planos del arquitecto se muestran a continuación:



Vista lateral



Vista superior

a) Parametrice la superficie del restaurante. Considere R como conocido.

b) La pared vertical curvada del restaurante será hecha de vidrio. ¿Cuánto vidrio se necesitará? Es decir, ¿cuál será el área de esta pared?

P2. [Integral de Flujo]

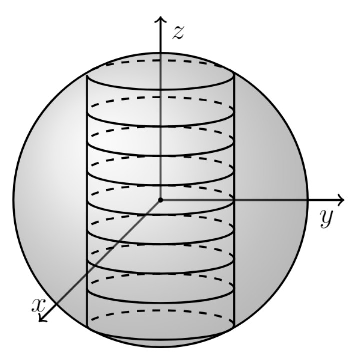
Un fluido se somete al campo de velocidades

$$\vec{V}(x,y,z) = (x-yz)\hat{\imath} + (y+xz)\hat{\jmath} + (z+2xy)\hat{z}$$

.

Sea S_1 la porción del cilindro $x^2+y^2=2$ que está dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

Calcule $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{V}\cdot\hat{n}dA$ con $\hat{n}$ normal interior del cilindro.



P3. Confirme el teorema de Gauss para $S \subset \mathbb{R}^3\{[0,1]^3\}$ con el campo $\vec{F}(x,y,z)x^2\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$.

P4. **[Gauss al límite]**

De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón y tienen como potencial a $U(r) = K\dfrac{e^{-\alpha r}}{r}$ en coordenadas esféricas, para cierta constante $K < 0$ y $\alpha > 0$.

a) Encuentre la fuerza $F = -\nabla U$, en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

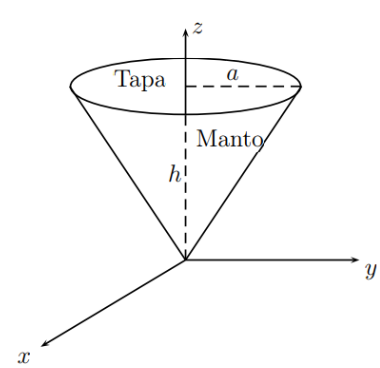
b) Calcule directamente el flujo a través de un casquete esférico de radio a $(a > 0)$, orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$, en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

d) Demuestre que si Ω es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_{\Omega} U dV$$

Recordar mirar clase 10, problema [Flujos en caras restantes]: Se desea calcular el flujo del campo vectorial $\overrightarrow{F} = -\hat{k}$ a través del manto (sin la tapa) del cono invertido de radio a y altura h que se muestra en la siguiente figura:



Pues en este tipo de problemas se utiliza Gauss para calcular de manera más sencilla una integral de flujo.