MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 3: Sistemas Ortogonales

7 de septiembre de 2021

P1. Diremos que un campo vectorial $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \backslash \{\text{Eje } Z\} \to \mathbb{R}^3$ tiene simetría cilíndrica si se puede escribir en coordenadas cilíndricas como:

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{\rho}) = F_\rho(\rho)\hat{\rho}, \rho > 0$$

Para alguna función $F_\rho : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

a) Muestre que todo campo con simetría cilíndrica es irrotacional.

b) Verifique que si un campo tiene simetría cilíndrica, entonces:

$$div\overrightarrow{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(F_\rho \rho)}{\partial \rho}$$

c) Deduzca que un campo con simetría cilíndrica es solenoidal (tiene divergencia nula) en $\mathbb{R}^3 \backslash \{\text{Eje } Z\}$ si y solo si para alguna constante $K \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{\rho}) = \frac{K}{\rho}\hat{\rho}$$

P2. [**Cálculo vectorial sobre fluidos**]

a) Considere las ecuaciones de Euler en régimen estacionario, en presencial de un campo gravitacional:

$$\rho \nabla v \cdot v + \nabla p = -\rho g \hat{k}$$

a) Demuestre la siguiente igualdad vectorial:

$$\nabla v \cdot v = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - v \times (\nabla \times v)$$

b) Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible (constante) se satisface la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = C, C \in R$$

P3. Para un valor $a > 0$ dado, se definen las coordenadas elípticas como $r(u, v, z) = (acosh(u)cos(v), asinh(u)sen(v), z)$ Demuestre que estas efectivamente definen un sistema ortogonal de coordenadas y calcule sus factores de escala.

P4. Sea un campo escalar de clase C^2 y G un campo vectorial de clase C^1, ambos definidos en R^3.

Se define F como $F = \nabla\phi + \mu\nabla \times G$, donde μ es una constante real. Demuestre que $div(F) = \Delta\phi$.

Propuestos

P1. $[\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0]$
El objetivo de este problema es demostrar que si $\vec{F} \in C^1$ es tal que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ entonces existe $\vec{G} \in C^2$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$. Para ello sea $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1.

a) Muestre que

$$\nabla \times \int_a^b \psi(\vec{x}, t)dt = \int_a^b \nabla \times \psi(\vec{x}, t)dt \quad (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

Hint: Puede usar la regla de Leibnitz: $(\partial/\partial u) \int_a^b \psi(\vec{x}, t)dt = \int_a^b (\partial/\partial u)\psi(\vec{x}, t)dt$ donde u es una variable cartesiana.

b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)\hat{\theta}$, en esféricas con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Verifique que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

c) Pruebe que

$$\nabla \times [\vec{F}(t\vec{x}) \times t\vec{x}] = 2t\vec{F}(t\vec{x}) + t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{x}) \quad \forall t > 0$$

d) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que $\nabla \cdot F = 0$ en la bola $B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$. Se puede probar (no lo haremos) que la fórmula anterior es válida en $B(0, R)$. Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{x}) = \int_0^1 (\vec{F}(t\vec{x}) \times t\vec{x})dt$. Usando lo anterior concluya que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ en $B(0, R)$.

P2. *a*) Si $\hat{k}$ es el vector unitario según el eje Z en el plano cartesiano, ϕ el ángulo cenital y $\hat{r}$ el vector unitario radial en esféricas, demuestre que

$$\hat{k} = cos(\phi)\hat{r} - sin(\phi)\hat{\phi}$$

b) Considere para un α real, el campo escalar $f : R^3 \to R$ definido por

$$f = \frac{\alpha \hat{k} \cdot \hat{r}}{4\pi r^2}$$

Calcule $F = -\nabla f$expresado en la base de coordenadas esféricas.

c) Considere ahora el campo vectorial $A : R^3 \to R^3$ definido por

$$A = \frac{\alpha \hat{k} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

Calcule su rotor$\nabla \times A$ d) De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial, en coordenadas esféricas: $U(r) = -K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ Donde $K, > 0$. Encuentre una fuerza F tal que, en $R^3\{0\}$:

$$F = -\nabla U$$

d) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $R^3\{0\}$.

Resumen

Coordenadas Cilíndricas: $T(\rho, \theta, k) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), k)$ y los factores $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_k = 1$

Coordenadas Esféricas: $T(r, \phi, \theta) = (r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi))$ y los factores $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin(\phi)$ y $h_\phi = r$.

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_j^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w_j}\right)\right]$$

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_u h_v)}{\partial w}\right]$$

P1. Diremos que un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \backslash \{\text{Eje } Z\} \to \mathbb{R}^3$ tiene simetría cilíndrica si se puede escribir en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{F}(\vec{\rho}) = F_\rho(\rho)\hat{\rho}, \rho > 0$$

Para alguna función $F_\rho : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

a) Muestre que todo campo con simetría cilíndrica es irrotacional.

b) Verifique que si un campo tiene simetría cilíndrica, entonces:

$$div\,\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(F_\rho \rho)}{\partial \rho}$$

c) Deduzca que un campo con simetría cilíndrica es solenoidal (tiene divergencia nula) en $\mathbb{R}^3 \backslash \{\text{Eje } Z\}$ si y solo si para alguna constante $K \in \mathbb{R}$:

$$\vec{F}(\vec{\rho}) = \frac{K}{\rho}\hat{\rho}$$

$$\vec{F}(\vec{\rho}) = F_\rho(\rho,\theta,z)\hat{\rho} + F_\theta(\rho,\theta,z)\hat{\theta} + F_z(\rho,\theta,z)\hat{z}$$

$$\text{rot}(F) = \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(F_w h_w) - \frac{\partial}{\partial w}(F_v h_v)\right]\hat{u}$$

$$+ \frac{1}{h_u h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(F_u h_u) - \frac{\partial}{\partial u}(F_w h_w)\right]\hat{v}$$

$$+ \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_v h_v) - \frac{\partial}{\partial v}(F_u h_u)\right]\hat{w}$$

a) irrotacional $\Rightarrow$ Pdq $\text{rot}(F) = 0$

$$F(\rho,\theta,k) = F(\rho)\,\hat{\rho}, \quad h_\rho = 1, \quad h_\theta = \rho, \quad h_k = 1$$

$$F_\rho = F(\rho), \quad F_\theta = F_k = 0$$

$$\operatorname{rot}(F) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(0) - \frac{\partial}{\partial k}(0)\right]\hat{\rho}$$

$$+ \frac{1}{1}\left[\frac{\partial}{\partial z}\cancelto{0}{(F(\rho)\cdot 1)} - \frac{\partial}{\partial \rho}(0)\right]\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(0) - \frac{\partial}{\partial\theta}\cancelto{0}{(F(\rho)\cdot 1)}\right]\hat{k}$$

$$= 0$$

b) $$\nabla \cdot F = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial(F_u h_v h_w)}{\partial u} + \frac{\partial(F_v h_u h_w)}{\partial v} + \frac{\partial(F_w h_u h_v)}{\partial w}\right]$$

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F(\rho)\rho\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}(0) + \frac{\partial(0)}{\partial z}\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F(\rho)\rho\right)\right)$$

c) Si uno solo reemplaza $\tilde{F}(\rho) = \frac{K}{\rho}\hat{\rho}$

(Se prueba una implicancia $\boxed{\Leftarrow}$)

$$\mathrm{Div}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\left(\frac{K}{\rho}\cdot\rho\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(K) = 0 \quad \checkmark$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que F es TN que

$$\mathrm{Div}(F) = 0$$

como F tiene simetría cilindrica (por prob 6)

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(F(\rho)\rho\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\underbrace{F(\rho)\,\rho}\right) = 0$$

integrando en ρ

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}\left(F(p)\,p\right) = 0$$

$$\Rightarrow F(p)\cdot p = C$$

$$\Rightarrow \boxed{F(p) = \frac{C}{p}}$$

(con lo que se concluye el otro)

P2. [Cálculo vectorial sobre fluidos]

a) Considere las ecuaciones de Euler en régimen estacionario, en presencial de un campo gravitacional:

$$\rho\nabla v \cdot v + \nabla p = -\rho g\hat{k}$$

a) Demuestre la siguiente igualdad vectorial:

$$\nabla v \cdot v = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - v \times (\nabla \times v)$$

cs 0

b) Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible (ρ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = C, C \in R$$

$$\Longleftrightarrow \quad \rho(\nabla v \cdot v)_x + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\rho(\nabla v \cdot v)_y + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\rho(\nabla v \cdot v)_z + \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\nabla F \cdot F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot F_2 + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot F_3 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} \cdot F_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y} \cdot F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot F_3 \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} \cdot F_1 + \frac{\partial F_3}{\partial y} \cdot F_2 + \frac{\partial F_3}{\partial t} \cdot F_3 \end{pmatrix}$$

$$(\nabla F \cdot F)_x = \frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot F_2 + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot F_3$$

a)

$$\nabla v \cdot v = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - v \times (\nabla \times v)$$

$$\frac{1}{2}\nabla(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = \frac{1}{2}\left(\nabla v_1^2 + \nabla v_2^2 + \nabla v_3^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 v_1 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x}\hat{i} + 2 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y}\hat{j}\right.$$

$$+\,2v_1\frac{\partial v_1}{\partial z}\hat{k} + \cdots$$

$$\frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2) = \left(v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\hat{i}$$

$$+\left(v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial y}\right)\hat{j}$$

$$+\left(v_1\frac{\partial v_1}{\partial z} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial z} + v_3\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\hat{k}$$

$$\mathrm{rot}(v) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\hat{j} +$$

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$v \times \mathrm{rot}(v) = \left|\begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \\ \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) & (\;) & (\;) \end{array}\right|$$

$$= v_2 \cdot \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) - v_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \hat{\imath}$$

$$- v_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + v_3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) \hat{\jmath}$$

$$+ v_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) - v_2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) \hat{k}$$

$$- v \times \mathrm{curl}(v) = - v_2 \cdot \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + v_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) \hat{\imath}$$

$$+ v_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) - v_3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) \hat{\jmath}$$

$$- v_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + v_2 \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) \hat{k}$$

$$= - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \hat{\imath}$$

$$- v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} - v_3 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} \hat{\jmath}$$

$$- v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} - v_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y}$$

Lado derecho $= \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial z}\right)\hat{\imath}$

$$+ \left(v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\hat{\jmath}$$

$$+ \left(v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)\hat{k}$$

$$= (\nabla v \cdot v)$$

---

b) $$\nabla v \cdot v = -\frac{\nabla p}{\rho} - g\hat{k} \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \nabla \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) \qquad (2)$$

irrotacional

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2} \nabla\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) = -\nabla p - \rho g \hat{k}$$

$\hat{\imath}$ $\Rightarrow$ $$\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)=-\frac{\partial}{\partial x}P$$

$\hat{\jmath}$ $$\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)=-\frac{\partial}{\partial y}P$$

$\hat{k}$ $$\frac{\rho}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)=-\frac{\partial}{\partial z}P-\rho g$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho}{2}\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)+P\right)=-\rho g$$

$\int dz$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\rho}{2}\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)+P=-\rho g z+C(x,y)}$$

Tienen que cumplir lo Todas las soluciones

$\hat{\jmath}$ $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho}{2}\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)+P\right)=+\frac{\partial}{\partial y}\left(C(x,y)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(C(x,y)\right) = 0$$

$$\Rightarrow C(x,y) = \tilde{C}(x)$$

Similar con $\hat{\imath}$ $\Rightarrow$ $\tilde{C}(x) = C$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) + P = \rho g z + C$$

$\forall$ solución

P3. Para un valor $a > 0$ dado, se definen las coordenadas elípticas como $r(u, v, z) = (acosh(u)cos(v), asinh(u)sen(v), z)$ Demuestre que estas efectivamente definen un sistema ortogonal de coordenadas y calcule sus factores de escala.

verificar que es inyectiva

$$J_r(u,v,z) = \begin{bmatrix} a\sinh(u)\cos(v) & -a\cosh(u)\sin(v) & 0 \\ a\cosh(u)\sin(v) & a\sinh(u)\cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h_u = \sqrt{a^2\left(\sinh(u)^2\cos(v)^2 + \cosh(u)^2\sin^2(v)\right)}$$

$$= a\sqrt{(-1+\cosh^2(u))(\cos(v)^2) + \cosh(u)^2(\sin^2(v))}$$

$$= a\sqrt{\cosh^2(u)\left(\cos(v)^2+\sin(v)^2\right) - \cos(v)^2}$$

$$= a\sqrt{\cosh^2(u) - \cos(v)^2}$$

$$h_v = a\sqrt{\cosh^2(u) - \cos(v)^2}$$

$h_z = 1$

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \begin{pmatrix} \frac{dr_1}{du} \\ \frac{dr_2}{du} \\ \frac{dr_3}{du} \end{pmatrix}, \quad \frac{d\vec{r}}{dv} = \begin{pmatrix} \frac{dr_1}{dv} \\ \frac{dr_2}{dv} \\ \frac{dr_3}{dv} \end{pmatrix}$$

$\frac{dr}{dz}$ es ortogonal a $\frac{d\vec{r}}{du}$ y $\frac{d\vec{r}}{dv}$

Falta que $\frac{d\vec{r}}{du}$ y $\frac{d\vec{r}}{dv}$

$$\frac{d\vec{r}}{du} \cdot \frac{d\vec{r}}{dv} = a^2 \Big(-\sinh(u)\sin(v)\cosh(u)\cos(v) + \sinh(u)\sin(v)\cosh(u)\cos(v) \Big) = 0$$

P4. Sea un campo escalar de clase C^2 y G un campo vectorial de clase C^1, ambos definidos en R^3. Se define F como $F = \nabla\phi + \mu\nabla \times G$, donde μ es una constante real. Demuestre que $div(F) = \Delta\phi$.

Constante entrar o salir de derivadas

$$F = \nabla\phi + \mu\, \nabla \times G$$

$$div(F) = div\left(\nabla\phi + \mu\, \nabla \times G\right)$$

linealidad

$$= \underbrace{div(\nabla\phi)}_{\text{identidad}} + div(\mu\, \nabla \times G)$$

$$= \Delta\phi +$$

idea $div(rotor(F)) = 0$

$$\mu\, \nabla \times G = \nabla \times (\mu G)$$

$$div(\mu\, \nabla \times G) = \mu\, div(\nabla \times G)$$

usando la que propone

$$\Rightarrow div(F) = \Delta\phi + 0$$

P1. $[\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0]$

El objetivo de este problema es demostrar que si $\vec{F} \in C^1$ es tal que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ entonces existe $\vec{G} \in C^2$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$. Para ello sea $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1.

a) Muestre que

$$\nabla \times \int_a^b \psi(\vec{x}, t) dt = \int_a^b \nabla \times \psi(\vec{x}, t) dt \qquad (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

Hint: Puede usar la regla de Leibnitz: $(\partial/\partial u) \int_a^b \psi(\vec{x}, t) dt = \int_a^b (\partial/\partial u) \psi(\vec{x}, t) dt$ donde u es una variable cartesiana.

b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)\hat{\theta}$, en esféricas con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Verifique que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

c) Pruebe que

$$\nabla \times [\vec{F}(t\vec{x}) \times t\vec{x}] = 2t\vec{F}(t\vec{x}) + t^2 \frac{d}{dt} \vec{F}(t\vec{x}) \qquad \forall t > 0$$

d) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que $\nabla \cdot F = 0$ en la bola $B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$. Se puede probar (no lo haremos) que la fórmula anterior es válida en $B(0, R)$. Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{x}) = \int_0^1 (\vec{F}(t\vec{x}) \times t\vec{x}) dt$. Usando lo anterior concluya que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ en $B(0, R)$.

$$\psi(\vec{x}, t) = \varphi(x, y, z, t)$$

<u>Leibnitz</u>

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^b \varphi(x, y, z, t)\, dt \right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (\varphi(x, y, z, t)) dt$$

Lo mismo para y y para z

$$\int_a^b \varphi(x, y, z, t)\, dt = \left(\int_a^b \varphi_1 (x, y, z, t) dt, \int_a^b \varphi_2, \int_a^b \varphi_3 \right)$$

$$\nabla \times \int_a^b \varphi(\vec{x}, t)\,dt = \int_a^b \nabla \times \varphi(\vec{x}, t)\,dt$$

b) $\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(g(r)\sin\theta\right)$

$= 0$

c) En vez de $\vec{x}$, usaremos $\vec{r}$

$\vec{r} = (r, \phi, \theta)$

$F(t\vec{r}) = g(tr)\,\hat{\theta}$

$$F(t\vec{r}) \times t\vec{r} = g(tr)\,\hat{\theta} \times tr\,\hat{r}$$

$$= g(tr)\,tr\,\hat{\phi}$$

$$\text{rot}\left(F(t\vec{r}) \times t\vec{r}\right) = \text{rot}\left(g(tr)\,tr\,\hat{\phi}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\phi}\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial\theta}(r\, g(tr)\, tr)}^{\,0}\, \hat{r} + r\sin\phi\, \frac{\partial}{\partial r}(r\, g(tr)\, tr)\,\hat{\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, g(tr)\, tr)\,\hat{\theta}$$

$$= \frac{t}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 g(tr))\,\hat{\theta}$$

$$= \frac{t}{r}\left(2r\, g(tr) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} g(tr)\right)\hat{\theta}$$

$$= 2t\, g(tr)\,\hat{\theta} + tr\,\frac{\partial}{\partial r} g(tr)\,\hat{\theta}$$

$$= 2t\, g(tr)\,\hat{\theta} + t^2 \cancel{r}\, \boxed{\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} g(\tilde{r})}\,\hat{\theta}$$

$$= 2t\,F(tr) + t^2$$

$$\frac{dF(t\vec{r})}{dt} = \frac{d}{dt}\, g(tr)\,\hat{r}$$

$$= \frac{d}{d\tilde{r}}\, g(tr) \cdot \frac{d\tilde{r}}{dt}$$

$$= \boxed{\frac{d}{d\tilde{r}}\, g(tr) \cdot r}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_0 T(\ldots) = 2t\,F(tr) + t^2 \frac{d}{dt} F(tr)}$$

d) $G(\vec{x}) = \int_0^1 F(t\vec{x}) \times t\vec{x} \, dt$

$$\operatorname{rot}(G(\vec{x})) = \int_0^1 \operatorname{rot}\left(F(t\vec{x}) \times t\vec{x}\right) dt$$

$$= \int_0^1 2t F(t\vec{x}) + t^2 \frac{d}{dt} F(t\vec{x}) \, dt$$

$$= \int_0^1 \cancel{2tF(t\vec{x})} + t^2 F(t\vec{x}) \Big|_0^1 - \int_0^1 \cancel{2tF(t\vec{x})}$$

$$= F(\vec{x})$$

P2. a) Si $\hat{k}$ es el vector unitario según el eje Z en el plano cartesiano, ϕ el ángulo cenital y $\hat{r}$ el vector unitario radial en esféricas, demuestre que

$$\hat{k} = cos(\phi)\hat{r} - sin(\phi)\hat{\phi}$$

b) Considere para un α real, el campo escalar $f : R^3 \to R$ definido por

$$f = \frac{\alpha\hat{k}\cdot\hat{r}}{4\pi r^2}$$

Calcule $F = -\nabla f$expresado en la base de coordenadas esféricas.

c) Considere ahora el campo vectorial $A : R^3 \to R^3$ definido por

$$A = \frac{\alpha\hat{k}\times\hat{r}}{4\pi r^2}$$

Calcule su rotor$\nabla \times A$ d) De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial, en coordenadas esféricas: $U(r) = -K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ Donde $K, > 0$. Encuentre una fuerza F tal que, en $R^3\{0\}$:

$$F = -\nabla U$$

d) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $R^3\{0\}$.

Resumen

Propuesto