MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 4: Superficies

21 de septiembre de 2021

P1. [Superficies]

a) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por

$$x = \cos\alpha \sin\beta \quad y = \sin\alpha \sin\beta \quad z = \cos\beta$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$ $\quad \beta \in [0, \pi]$.

b) Repita para

$$x = \sin\gamma \quad y = \mu \quad z = \cos\gamma$$

con $\gamma \in [0, 2\pi]$ $\quad \mu \in [-1, 3]$.

c) ¿Qué puede decir de la regularidad de las superficies?

P2. [Área de superficie]

a) Encuentre el área de la superficie definida por $S = \{x^2 + y^2 \leq 2;\ z = xy\}$.

b) Sea $\phi(u, v)(u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unitario en el plano (u, v). Encuentre el área de $\phi(D)$.

P3. [Integrales sobre superficies]

Evalúe la integral

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z) dS$$

en $S = \{x^2 + y^2 \leq 4;\ z = 4 + x + y\}$.

P4. [Integral de Flujo sobre superficie]

Consideremos que la temperatura en cada punto viene dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Además el flujo de calor viene dado por $\vec{F} = -k\nabla T$, supongamos $k = 1$. Cuantifique el calor que atraviesa la superficie $S\{x^2 + z^2 = 2;\ 0 \leq y \leq 2\}$.

Resumen

1. Sea S una superficie parametrizada por $\phi(u,v) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
2. Definimos el vector normal a la superficie por $\hat{n} = \dfrac{\partial_u \phi \times \partial_v \phi}{||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||}$.
3. Un punto en la superficie se dice regular si los los vectores tangentes en las direcciones u, v no son nulos ni paralelos, ie, su producto vectorial no es nulo, ie, el vector normal no es nulo.
4. El área de la superficie S viene dada por:

$$A(S) \iint_S dS = \iint_D ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| dudv$$

Donde $dS = \overbrace{||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||}\, dudv$.

$$\boxed{\phi(D) = S}$$

5. La integral de f sobre la superficie S viene dada por:

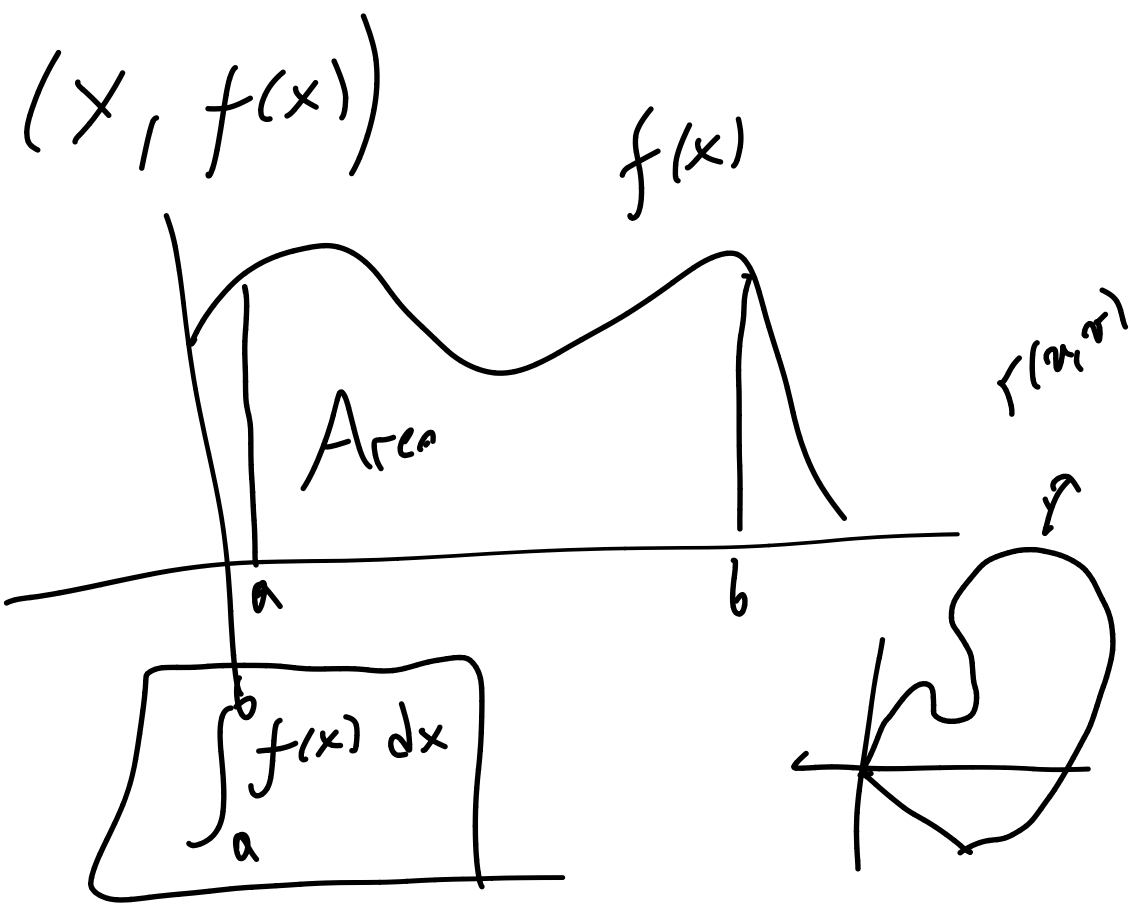
$$\iint_S f dS = \iint_D f(\phi(u,v)) ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| dudv$$

6. La integral de flujo de $\vec{F}$ sobre la superficie S viene dada por:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F}(\phi(u,v)) \cdot [\partial_u \phi \times \partial_v \phi] (u,v) dudv$$

Sin normalizar

Donde (u, v) significa que está siendo evaluada dicha función.



P1. [Superficies]

a) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por

$$x = \cos\alpha \sin\beta \qquad y = \sin\alpha \sin\beta \qquad z = \cos\beta$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$ $\quad \beta \in [0, \pi]$. $\Rightarrow \sin(\beta) \geq 0$

b) Repita para

$$x = \sin\gamma \qquad y = \mu \qquad z = \cos\gamma$$

con $\gamma \in [0, 2\pi]$ $\quad \mu \in [-1, 3]$.

c) ¿Qué puede decir de la regularidad de las superficies?

$$\begin{array}{cccc} & \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\alpha} = & \big(-\sin(\alpha)\sin(\beta), & \cos(\alpha)\sin(\beta), & 0\big) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\beta} = & \big(\cos(\alpha)\cos(\beta), & \sin(\alpha)\cos(\beta), & -\sin(\beta)\big) \end{array}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\phi}{\partial\beta} = \big(-\cos(\alpha)\sin^2(\beta), -\sin(\alpha)\sin(\beta)^2, -\sin(\alpha)^2\cos(\beta)\sin(\beta) - \cos(\alpha)^2\cos(\beta)\sin(\beta)\big)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\phi}{\partial\beta} = \big(-\cos(\alpha)\sin^2(\beta), -\sin(\alpha)\sin(\beta)^2, -\cos(\beta)\sin(\beta)\big)$$

$$\left\| \frac{\partial\phi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\phi}{\partial\beta} \right\|^2 = \left(\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2\right)\sin(\beta)^4 + \cos(\beta)^2\sin(\beta)^2$$

$$= \sin^4(\beta) + \cos(\beta)^2\sin(\beta)^2 = \sin(\beta)^2$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right\| = \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \hat{n}(\alpha, \beta) = -\big(\sin(\beta)\cos(\alpha), \sin(\beta)\sin(\alpha), \cos(\beta)\big)$$

Para que valores de α, β

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right\| = 0 \Rightarrow \beta = 0 \vee \beta = \pi$$

Es regular $\alpha \in [0, 2\pi]$

$\beta \in (0, \pi)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = 1$$

es una esfera

P1. [Superficies]

a) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por

$$x = \cos\alpha \sin\beta \quad y = \sin\alpha \sin\beta \quad z = \cos\beta$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$ $\quad \beta \in [0, \pi]$.

b) Repita para

$$x = \sin\gamma \quad y = \mu \quad z = \cos\gamma$$

con $\gamma \in [0, 2\pi]$ $\quad \mu \in [-1, 3]$.

c) ¿Qué puede decir de la regularidad de las superficies?

$$\frac{\partial \phi}{\partial \gamma} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \left(\cos\gamma, \; 0, \; -\sin\gamma \right) \end{array} \quad \begin{array}{c|c} i & j \\ \cos\gamma & 0 \end{array}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu} = \left(0, \; 1, \; 0 \right) \quad \begin{array}{c|c} 0 & 1 \end{array}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \times \frac{\partial \phi}{\partial \mu} = \left(\sin\gamma, \; 0, \; \cos(\gamma) \right)$$

(ya es de norma 1)

$$n(\gamma, \mu) = \left(\sin\gamma, \; 0, \; \cos\gamma \right)$$

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \times \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right\| = 1 \Rightarrow$$ Es siempre regular

P2. [**Área de superficie**]

a) Encuentre el área de la superficie definida por $S = \{x^2 + y^2 \leq 2;\ z = xy\}$.

b) Sea $\phi(u,v)(u-v, u+v, uv)$ y sea D el disco unitario en el plano (u,v). Encuentre el área de $\phi(D)$.

$\boxed{x^2 + y^2 \leq 2} \Rightarrow$ Cilindro radio menor o igual a $\sqrt{2}$

a)

Cilíndricas o polares

$z = xy$

$$\boxed{z = \frac{x^2+y^2}{2} \quad \text{otro caso}}$$

$$S = \begin{cases} x = r\cos\theta, & r \in [0, \sqrt{2}] \\ y = r\sin\theta, & \theta \in [0, 2\pi) \\ z = r^2 \cos\theta \sin\theta \end{cases}$$

$$\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \underbrace{r^2\cos\theta\sin\theta}_{\frac{r^2}{2}\sin(2\theta)})$$

$r \in [0, \sqrt{2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\begin{array}{lccc|c|c} & \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} = (& \cos\theta, & \sin\theta, & r\sin(2\theta)) & \cos\theta & \sin\theta \\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = (& -r\sin\theta, & r\cos\theta, & r^2\cos(2\theta)) & -r\sin\theta & r\cos\theta \end{array}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \times \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \Big(r^2\cos(2\theta)\sin(\theta) - r^2\cos\theta\sin(2\theta),$$

$$-r^2\sin(2\theta)\sin\theta - r^2\cos(2\theta)\cos(\theta),$$

$$\underbrace{\cancel{r\cos(\theta)^2 + r\sin(\theta)^2}}_{r} \Big)$$

$$\| \quad \|^2 = r^4\left(\cos(2\theta)^2\sin(\theta)^2 - \cancel{2(\quad)} + \cos(\theta)^2\sin(2\theta)^2\right)$$

$$+ r^4\left(\sin(2\theta)^2\sin(\theta)^2 + \cancel{2(\quad)} + \cos(2\theta)^2\cos(\theta)^2\right)$$

$$+ r^2$$

$$\| \quad \|^2 = r^4 + r^2$$

$$\Rightarrow \| \quad \| = r\sqrt{1+r^2}$$

$$A(S) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+r^2}\, d\theta\, dr$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+r^2}\,(2r)\,dr$$

$$= \pi \left. \frac{2}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}} \right|_0^{\sqrt{2}}$$

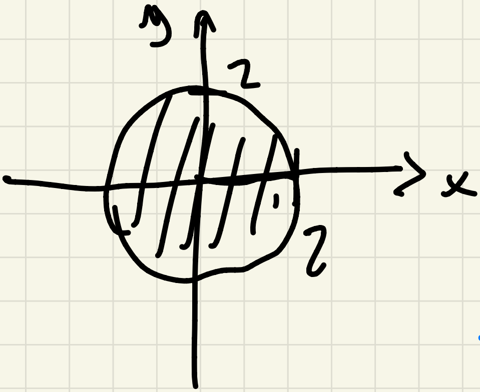
$$A = \boxed{\pi \frac{2}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1\right)}$$

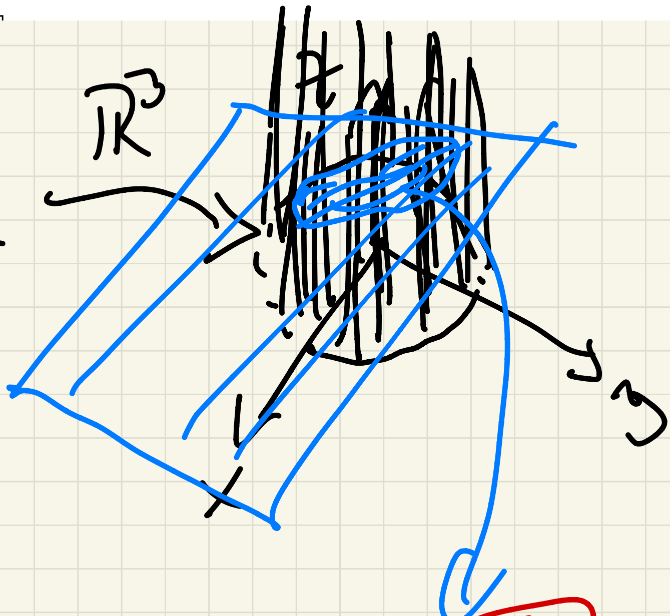
P3. **[Integrales sobre superficies]**

Evalúe la integral

$$\iint_S (x^2z + y^2z)\,dS$$

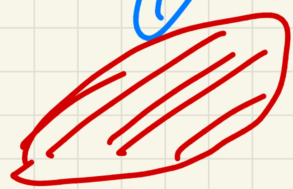
en $S = \{\underbrace{x^2 + y^2 \leq 4}; \underbrace{z = 4 + x + y}\}$.





$$Ax + By + Cz = D$$

Plano



Circulo - elipse

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad z = 4 + r(\cos\theta + \sin\theta)$$

$r \in [0, 2]$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \cos\theta \, \hat{i} + \sin\theta \, \hat{j} + (\cos\theta + \sin\theta) \, \hat{k}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -r\sin\theta \, \hat{i} \quad r\cos\theta \, \hat{j} + r(-\sin\theta + \cos\theta) \, \hat{k}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & \hat{i} & \hat{j} \\
\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta + \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\
-r\sin\theta & r\cos\theta & r(-\sin\theta + \cos\theta) & -r\sin\theta & r\cos\theta
\end{array}$$

$$-r\sin^2(\theta) + \cancel{r\cos\theta\sin\theta} - r\cos^2\theta - \cancel{r\cos\theta\sin\theta} \quad \hat{i}$$

$$+ -\cancel{r\sin\theta\cos\theta} - r\sin\theta^2 + \cancel{r\cos\theta\sin\theta} - r\cos\theta^2 \quad \hat{j}$$

$$+ \; r\cos\theta^2 + r\sin\theta^2$$

$$= -r\,\hat{i} - r\,\hat{j} + r\,K$$

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial r} \times \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{3}\, r$$

$$\int f\,dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \left(4 + r(\cos\theta + \sin\theta)\right)\sqrt{3}\, r \, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 \sqrt{3}\,(4)\, d\theta\, dr$$

$$= 8\pi\sqrt{3} \int_0^2 r^3\, dr$$

$$= 2\pi\sqrt{3}\; r^4 \Big|_0^2$$

$$= \boxed{32\pi\sqrt{3}}$$

P4. [Integral de Flujo sobre superficie]

Consideremos que la temperatura en cada punto viene dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Además el flujo de calor viene dado por $\vec{F} = -k\nabla T$, supongamos $k = 1$. Cuantifique el calor que atraviesa la superficie $S\{x^2 + z^2 = 2;\ 0 \leq y \leq 2\}$.

$$\vec{F} = -(1)\,(6x, 0, 6z)$$

$$F(x,y,z) = -6x, 0, -6z$$

$$\boxed{\text{Flujo} = \int \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds}$$

$$S = \left\{ (\theta, h) : \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ z = \sqrt{2}\sin\theta \\ y = h \end{array} \quad h \in [0,2],\ \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

$$\varphi(\theta, h) = (\sqrt{2}\cos\theta, h, \sqrt{2}\sin\theta)$$

$$\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k} \quad \hat{i} \quad \hat{j}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \left(-\sqrt{2}\sin\sigma,\ 0,\ \sqrt{2}\cos\sigma\right) \quad -\sqrt{2}\sin\sigma,\ 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \left(0,\ 1,\ 0\right) \quad 0,\ 1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \times \frac{\partial \varphi}{\partial h} = \left(-\sqrt{2}\cos\sigma,\ 0,\ -\sqrt{2}\sin\sigma\right)$$

$$F(\varphi(\sigma, h)) = \left(-6\sqrt{2}\cos\sigma,\ 0,\ -6\sqrt{2}\sin\sigma\right)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = 12\cos^2\sigma + 12\sin^2\sigma = \boxed{24}$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} 24 \, d\sigma \, dh = \boxed{96\pi}$$