**MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**
**Profesor:** Alexis Fuentes
**Auxiliares:** Vicente Salinas
**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl

# Auxiliar 4: Superficies

21 de septiembre de 2021

**P1. [Superficies]**

*a*) Encuentre una expresión para el vector normal de la superficie dada por

$$x = \cos\alpha \sin\beta \quad y = \sin\alpha\sin\beta \quad z = \cos\beta$$

con $\alpha \in [0, 2\pi] \quad \beta \in [0, \pi]$.

*b*) Repita para

$$x = \sin\gamma \quad y = \mu \quad z = \cos\gamma$$

con $\gamma \in [0, 2\pi] \quad \mu \in [-1, 3]$.

*c*) ¿Qué puede decir de la regularidad de las superficies?

**P2. [Área de superficie]**

*a*) Encuentre el área de la superficie definida por $S = \{x^2 + y^2 \leq 2;\, z = xy\}$.

*b*) Sea $\phi(u, v)(u - v, u + v, uv)$ y sea $D$ el disco unitario en el plano $(u, v)$. Encuentre el área de $\phi(D)$.

**P3. [Integrales sobre superficies]**

Evalúe la integral

$$\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS$$

en $S = \{x^2 + y^2 \leq 4;\, z = 4 + x + y\}$.

**P4. [Integral de Flujo sobre superficie]**

Consideremos que la temperatura en cada punto viene dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Además el flujo de calor viene dado por $\vec{F} = -k\nabla T$, supongamos $k = 1$. Cuantifique el calor que atraviesa la superficie $S\{x^2 + z^2 = 2;\, 0 \leq y \leq 2\}$.

## Resumen

1. Sea $S$ una superficie parametrizada por $\phi(u,v) : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
2. Definimos el vector normal a la superficie por $\hat{n}\dfrac{\partial_u \phi \times \partial_v \phi}{||\partial_u \phi \times \partial_v \phi||}$.
3. Un punto en la superficie se dice regular si los los vectores tangentes en las direcciones $u, v$ no son nulos ni paralelos, ie, su producto vectorial no es nulo, ie, el vector normal no es nulo.
4. El área de la superficie $S$ viene dada por:

   $$A(S) \iint_S dS = \iint_D ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| dudv$$

   Donde $dS = ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| dudv$.
5. La integral de $f$ sobre la superficie $S$ viene dada por:

   $$\iint_S f dS = \iint_D f(\phi(u,v)) ||\partial_u \phi \times \partial_v \phi|| dudv$$

6. La integral de flujo de $\vec{F}$ sobre la superficie $S$ viene dada por:

   $$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F}(\phi(u,v)) \cdot \left[\partial_u \phi \times \partial_v \phi\right](u,v) dudv$$

   Donde $(u,v)$ significa que está siendo evaluada dicha función.