MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 3: Sistemas Ortogonales

7 de septiembre de 2021

P1. Diremos que un campo vectorial $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \backslash \{\text{Eje } Z\} \to \mathbb{R}^3$ tiene simetría cilíndrica si se puede escribir en coordenadas cilíndricas como:

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{\rho}) = F_\rho(\rho)\hat{\rho}, \rho > 0$$

Para alguna función $F_\rho : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

a) Muestre que todo campo con simetría cilíndrica es irrotacional.

b) Verifique que si un campo tiene simetría cilíndrica, entonces:

$$div \overrightarrow{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(F_\rho \rho)}{\partial \rho}$$

c) Deduzca que un campo con simetría cilíndrica es solenoidal (tiene divergencia nula) en $\mathbb{R}^3 \backslash \{\text{Eje } Z\}$ si y solo si para alguna constante $K \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{\rho}) = \frac{K}{\rho}\hat{\rho}$$

P2. [**Cálculo vectorial sobre fluidos**]

a) Considere las ecuaciones de Euler en régimen estacionario, en presencial de un campo gravitacional:

$$\rho \nabla v \cdot v + \nabla p = -\rho g \hat{k}$$

a) Demuestre la siguiente igualdad vectorial:

$$\nabla v \cdot v = \frac{1}{2}\nabla(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - v \times (\nabla \times v)$$

b) Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible (constante) se satisface la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\rho}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = C, C \in R$$

P3. Para un valor $a > 0$ dado, se definen las coordenadas elípticas como $r(u, v, z) = (acosh(u)cos(v), asinh(u)sen(v), z)$ Demuestre que estas efectivamente definen un sistema ortogonal de coordenadas y calcule sus factores de escala.

P4. Sea un campo escalar de clase C^2 y G un campo vectorial de clase C^1, ambos definidos en R^3.

Se define F como $F = \nabla\phi + \mu\nabla \times G$, donde μ es una constante real. Demuestre que $div(F) = \Delta\phi$.

Propuestos

P1. $[\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0]$

El objetivo de este problema es demostrar que si $\vec{F} \in C^1$ es tal que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ entonces existe $\vec{G} \in C^2$ tal que $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$. Para ello sea $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1.

a) Muestre que

$$\nabla \times \int_a^b \psi(\vec{x}, t)dt = \int_a^b \nabla \times \psi(\vec{x}, t)dt \qquad (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

Hint: Puede usar la regla de Leibnitz: $(\partial/\partial u) \int_a^b \psi(\vec{x}, t)dt = \int_a^b (\partial/\partial u)\psi(\vec{x}, t)dt$ donde u es una variable cartesiana.

b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)\hat{\theta}$, en esféricas con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Verifique que $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

c) Pruebe que

$$\nabla \times [\vec{F}(t\vec{x}) \times t\vec{x}] = 2t\vec{F}(t\vec{x}) + t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{x}) \qquad \forall t > 0$$

d) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que $\nabla \cdot F = 0$ en la bola $B(0, R) \subset \mathbb{R}^3$. Se puede probar (no lo haremos) que la fórmula anterior es válida en $B(0, R)$. Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{x}) = \int_0^1 (\vec{F}(t\vec{x}) \times t\vec{x})dt$. Usando lo anterior concluya que $\vec{F} = \nabla \times \vec{G}$ en $B(0, R)$.

P2. *a*) Si $\hat{k}$ es el vector unitario según el eje Z en el plano cartesiano, ϕ el ángulo cenital y $\hat{r}$ el vector unitario radial en esféricas, demuestre que

$$\hat{k} = cos(\phi)\hat{r} - sin(\phi)\hat{\phi}$$

b) Considere para un α real, el campo escalar $f : R^3 \to R$ definido por

$$f = \frac{\alpha\hat{k} \cdot \hat{r}}{4\pi r^2}$$

Calcule $F = -\nabla f$expresado en la base de coordenadas esféricas.

c) Considere ahora el campo vectorial $A : R^3 \to R^3$ definido por

$$A = \frac{\alpha\hat{k} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

Calcule su rotor$\nabla \times A$ d) De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial, en coordenadas esféricas: $U(r) = -K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ Donde $K, > 0$. Encuentre una fuerza F tal que, en $R^3\{0\}$:

$$F = -\nabla U$$

d) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $R^3\{0\}$.

Resumen

Coordenadas Cilíndricas: $T(\rho, \theta, k) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), k)$ y los factores $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_k = 1$

Coordenadas Esféricas: $T(r, \phi, \theta) = (r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi))$ y los factores $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin(\phi)$ y $h_\phi = r$.

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_j^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w_j}\right)\right]$$