MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 2: Campos Conservativos e Integrales de Trabajo

31 de agosto de 2021

P1. [Campos Conservativos]

a) Verifique si los siguientes campos son conservativos.

1) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y^2\cos(x) + z^3)\hat{i} + (2y\sin(x) - 4)\hat{j} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$

2) $\overrightarrow{G}(\rho,\theta,z) = \dfrac{\rho z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{\rho} - \dfrac{\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$

P2. Considere que esta en el campo $F(x,y) = (\sin(x)y, sin(y) - cos(x))$ ¿Cuanto es el trabajo realizado por desplazarse por $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con $\Gamma_1 = (\pi(1-cos(t)), \pi(sin(t)))$, para $t \in [0,\pi)$ y $\Gamma_2 = (\pi(2-\sin(t)), \pi(cos(t)-1)))$ para $t \in [\pi, 2\pi]$

P3. a) Calcule el gradiente en coordenadas cartesianas de

$$f(x,y,z) = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

¿Calcúlelo en coordenadas esféricas? ¿Como se relacionan estos cálculos?

b) Se definen las coordenadas parabólicas (ϵ,η,ϕ), tal que $x = \epsilon\eta\cos(\phi)$, $y = \epsilon\eta\sin(\phi)$ y $z = \dfrac{1}{2}(\eta^2 - \epsilon^2)$. Calcule el gradiente y el laplaciano en estas coordenadas. ($\eta, \epsilon > 0$ y $\phi \in [0, 2\pi]$)

P4. Sea ψ un campo escalar y F, G campos vectoriales suficientemente diferenciables. Demuestre las siguientes identidades:

a) $div(\psi\nabla\psi) = \|\nabla\psi\|^2 + \psi\Delta\psi$

b) $\Delta G = \nabla(div(G)) - rot(rot(G))$

Propuestos

P1. Coordenadas bipolares (σ, τ), con $\sigma \in (0, 2\pi)$ y $\tau \in (-\infty, \infty)$.La a es una constante, estas coordenadas cumplen que:

$$x = a\frac{\sinh(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \text{ e } y = a\frac{\sin(\sigma)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)}$$

a) Pruebe que el gradiente en estas coordenadas es: $\nabla f = \frac{(\cosh(\tau) - \cos(\sigma))}{a}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\hat{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \tau}\hat{\tau}\right)$

b) Pruebe que la formula para el laplaciano es: $\Delta f = \frac{(\cosh(\tau) - \cos(\sigma))^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right)$

Indicación: Pruebe que $h_\sigma = h_\tau = \dfrac{a}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)}$

P2. Pruebe las siguientes identidades:

a) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \Delta \nabla g$

b) $rot(F) = Fdiv(G) - Gdiv(F) + (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G$

Resumen

Integral de trabajo de un campo $\overrightarrow{F}$ sobre una curva:
Sea Γ una curva simple y regular en $\mathbb{R}^3$, y sea $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función continua. Se define la integral de F sobre la curva Γ, donde $\overrightarrow{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de Γ. mediante:

$$W = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} := \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt}dt$$

Coordenadas Cilíndricas: $T(\rho, \theta, k) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), k)$ y los factores $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$ y $h_k = 1$

Coordenadas Esféricas: $T(r, \phi, \theta) = (r\cos(\theta)\sin(\phi), r\sin(\theta)\sin(\phi), r\cos(\phi))$ y los factores $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin(\phi)$ y $h_\phi = r$.

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\hat{u} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\hat{v} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\hat{w}$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial w_j}\left[\frac{h_1h_2h_3}{h_j^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w_j}\right)\right]$$