MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 1: Curvas e introducción al Cálculo Vectorial

24 de agosto de 2021

P1. Una hormiga que parte en el origen, sube por el alambre parametrizado (con t positivo) por:

$$r(t) = \left(t^2\cos(t), t^2\sin(t), \frac{t^3}{\sqrt{3}}\right)$$

Esta parametrización es suave, simple y/o regular?. Determine a qué distancia del plano OXY se encuentra la hormiga cuando ha recorrido una distancia $d = \frac{14}{3}$ por el alambre.

P2. Dada una curva C descrita en coordenadas polares por la ecuación $r = f(\phi)$, donde $a \leq \phi \leq b \leq a + 2\pi$, demostrar que la longitud de arco es

$$\int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2} d\phi$$

Utilice este resultado para calcular el largo de la cardioide de ecuación $r = K(1 + \cos(\phi))$.
[**Pregunta Extra??]:** Que sucederá con $r = K(1 + \cos(2\phi))$ o con $r = K(1 + \cos(\phi/2))$

P3. Demuestre que el centro de masa de medio anillo, parametrizado por una semicircunferencia de radio r (centrada en el origen y ubicada en la parte positiva del eje Y), es $(0, \frac{2r}{\pi})$.

P4. Dibuje las lineas de corrientes de los siguientes campos vectoriales.

a) $F(x, y) = (x, y)$

b) $F(x, y) = (1, y^2 - y)$

c) $F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{-z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$

d) $F(r, \theta, \phi) = \frac{K}{r^2}\hat{r}$, para $K > 0$ y $K < 0$.

Obs1: El campo *a*) es solenoidal!! Averigüe que es este concepto.
Obs2: El campo *d*) es irrotacional!! Averigüe que es este concepto.

Propuestos

P1. Una partícula describe una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2+y^2=z^2$ de tal forma que su altura z cumple que $z=e^{-\theta}$, $\theta\in[0,\infty)$, con θ el ángulo en polares que cumple que:
$x=r(\theta)\cos(\theta)$ e $y=r(\theta)\sin(\theta)$

a) Encuentre una parametrización, indique si es suave, simple, regular y finalmente dibuje la curva

b) Calcule el largo de la curva Γ

P2. Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$ y la longitud de la curva $y=f(x)$ entre 0 y x es igual a $e^x-f(x)-1$. Determine $f(x)$.
Indicación: Utilizar TFC

Resumen

Norma euclidiana de un vector $\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,....,x_i,...,x_n)\in R^n$: $\|\overrightarrow{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...x_i^2+..+x_n^2}$

Una curva Γ es:
1) **Suave:** Si admite una parametrización de clase C^1.
2) **Regular:** Si admite una parametrización $\overrightarrow{r}(t)$ de clase C^1 tal que $\|\frac{dr(t)}{dt}\|>0$, $\forall t\in[a,b]$.
3) **Simple:** Si admite una parametrización de clase C^1 que sea inyectiva.
4) **Cerrada:** Si admite una parametrización $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que: $r(a)-r(b)=0$.
5) **Cerrada simple:** Si admite una parametrización $r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $r(a)=r(b)$ y que sea inyectiva sobre $[a,b)$.

Sea Γ una curva simple y regular y $\overrightarrow{r}(t)$ regular. Definimos la función longitud de arco $s:[a,b]\to[0,L(\Gamma)]$ como:

$$s(t):=\int_a^t\left\|\frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}}\right\|d\hat{t}$$

Observación: El caso de $t=b$, entrega exactamente la longitud de curva entre $\overrightarrow{r}(a)$ y $\overrightarrow{r}(b)$.

Integral de Linea Sea $F:\omega\subset R^n\to R^n$ y sea $\Gamma\subset\Omega$, una curva con una parametrización simple y regular $r(t)$, con $t\in[a,b]$, se defina la integral de linea sobre Γ como:

$$\int_\Gamma F:=\int_a^b F(r(\hat{t}))\left\|\frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}}\right\|d\hat{t}$$

P1. Una hormiga que parte en el origen, sube por el alambre parametrizado (con t positivo) por:

$$r(t) = \left(t^2\cos(t), t^2\sin(t), \frac{t^3}{\sqrt{3}}\right)$$

Esta parametrización es suave, simple y/o regular?. Determine a qué distancia del plano OXY se encuentra la hormiga cuando ha recorrido una distancia $d = \frac{14}{3}$ por el alambre.

Suave (Ver que cada componente es C^1)

$r_1(t) = t^2 \cos(t)$

$r_1'(t) = 2t\cos(t) - t^2\sin(t)$ / es continua por Alg de continuas

$\checkmark$ C^1

$r_2(t) = t^2 \sin(t)$

t^2 es C^∞

$\sin(t)$ es C^∞

por Algebra de C^∞ el producto es C^∞

Obs: Caso de división hay que mencionar/o probar que el denominador $\neq 0$

$r_2'(t) = 2t\sin(t) + t^2\cos(t)$

$r_3'(t) = \sqrt{3}\,t^2$ (es continua $\Rightarrow C^1$)

es suave

Regular ($\|\frac{dr}{dt}\| > 0$)

$t > 0$ $\Downarrow$

$$\left\|\frac{dr}{dt}\right\|^2 = \left(2t\cos(t) - t^2\sin(t)\right)^2 \geq 3t^4 > 0$$

$$+\left(2t\sin(t) + t^2\cos(t)\right)^2$$

$$+ t^4 \cdot 3$$

$$= t^2\left(4\cos^2(t) - 4t\sin(t)\cos(t) + t^2\sin^2(t)\right)$$

$$+ t^2\left(4\sin^2(t) + 4t\sin(t)\cos(t) + t^2\cos^2(t)\right)$$

$$+ t^2(t^2 3)$$

$$= 4t^2 + t^4 + 3t^4$$

$$= 4t^2(1+t^2)$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{dr}{dt}\right\| = 2t\sqrt{1+t^2} > 0 \quad , \text{ para } t>0$$

<u>Simple (inyectiva)</u>

¿ $\hat{r}(t) = (t, \cos(t))$?

Sean t_1, t_2

Pdq $\hat{r}(t_1) = \hat{r}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$

$$\Downarrow$$

$$(\overline{t_1}, \underline{\cos(t_1)}) = (\overline{t_2}, \underline{\cos(t_2)})$$

$$\cos(t_1) = \cos(t_2) \not\Rightarrow t_1 = t_2$$

$$\Rightarrow t_1 = t_2$$

$(\cos(t), \sin(t))$

$$\Gamma(t) = \left(t^2\cos(t), t^2\sin(t), \frac{t^3}{\sqrt{3}}\right)$$

Si tomamos t_1, t_2 tales que

$$\boxed{\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2) \Rightarrow \frac{t_1^3}{\sqrt{3}} = \frac{t_2^3}{\sqrt{3}} \Rightarrow t_1 = t_2} \Rightarrow \text{Simple}$$

¿ $\tilde{\Gamma}(t) = (t^2\cos(t), t^2\sin(t))$? $t > 0$

$\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2)$

$$\Rightarrow t_1^2\cos(t_1) = t_2^2\cos(t_2) \quad (1)$$

$$t_1^2\sin(t_1) = t_2^2\sin(t_2) \quad (2)$$

$(1)^2 + (2)^2$

$$t_1^4 \left(\cos^2(t_1) + \sin^2(t_1)\right) = t_2^4 \left(\cos^2(t_2) + \sin^2(t_2)\right)$$

$$\Rightarrow t_1^4 = t_2^4 \quad / \sqrt[4]{\ }$$

$$\Rightarrow t_1 = t_2$$

$$\boxed{\frac{14}{3} = \int_0^{t_0} \left\| \frac{dr}{dt} \right\| dt}$$

$$\left\| \frac{dr}{dt} \right\| = 2t\sqrt{1+t^2}$$

$$\frac{14}{3} = \int_0^{t_0} 2t\sqrt{1+t^2}\, dt \qquad / \; u = t^2+1, \quad du = 2t\,dt$$

$$\frac{14}{\cancel{3}} = \int_1^{t_0^2+1} \sqrt{u}\, du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\cancel{3}} \Bigg|_1^{t_0^2+1}$$

$$14 = 2(t_0^2+1)^{\frac{3}{2}} - 2$$

$$(\quad)^{\frac{2}{3}}$$

$$8 = (t_0^2+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$4 = t_0^2+1 \longrightarrow \boxed{t_0 = \sqrt{3}}$$

$$r(t_0) = \left(t_0^2\cos(t_0),\ t_0^2\sin(t_0),\ 3\right)$$

$\underbrace{\text{En el instante que recorre}}_{t_0}$ $\frac{14}{3}$

Cual es la distancia al plano Oxy

(es el plano $z=0$)

(Es la componente $z = 3$)

P2. Dada una curva C descrita en coordenadas polares por la ecuación $r = f(\phi)$, donde $a \leq \phi \leq b \leq a + 2\pi$, demostrar que la longitud de arco es

$$\int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2}\, d\phi$$

Utilice este resultado para calcular el largo de la cardioide de ecuación $r = K(1 + \cos(\phi))$.
[**Pregunta Extra??**]: Que sucederá con $r = K(1 + \cos(2\phi))$ o con $r = K(1 + \cos(\phi/2))$

$$\Gamma(t) = (\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)) \qquad t \in [a, b]$$

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{\Gamma_1'(t)^2 + \Gamma_2'(t)^2}\, dt$$

$$x = f(\phi) \cos(\phi)$$

$$y = f(\phi) \sin(\phi)$$

$$\Gamma(\phi) = (\underbrace{f(\phi)\cos(\phi)}_{\Gamma_1(\phi)}, \underbrace{f(\phi)\sin(\phi)}_{\Gamma_2(\phi)})$$

$$\Gamma_1'(\phi) = f'(\phi)\cos(\phi) - f(\phi)\sin(\phi)$$

$$\Gamma_2'(\phi) = f'(\phi)\sin(\phi) + f(\phi)\cos(\phi)$$

$$r_1'(\phi)^2 = f'(\phi)^2 \cos(\phi)^2 + f(\phi)^2 \sin(\phi)^2$$
$$- 2 f'(\phi) \cancel{f(\phi) \cos(\phi)} \sin(\phi)$$

$$r_2'(\phi)^2 = f'(\phi)^2 \sin(\phi)^2 + f(\phi)^2 \cos(\phi)^2$$
$$+ 2 f'(\phi) \cancel{f(\phi) \cos(\phi)} \sin(\phi)$$

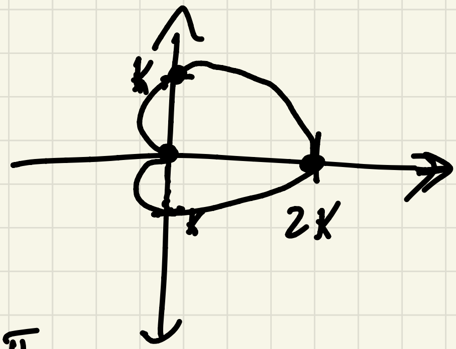
$$r_1'(\phi)^2 + r_2'(\phi)^2 = f'(\phi)^2 + f(\phi)^2$$
$$= r'(\phi)^2 + r(\phi)^2$$

$$\left\| \frac{dr}{d\phi} \right\| = \sqrt{r^2 + \frac{dr}{d\phi}^2}$$

$$\Rightarrow \quad L_a^b = \int_a^b \sqrt{r^2 + \frac{dr}{d\phi}^2}$$

$$r = K(1+\cos(\phi)).$$

$\phi \in [0, 2\pi]$



$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{K^2(1+\cos(\phi))^2 + (-K\sin(\phi))^2}\, d\phi$$

$$= K \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2\cos(\phi) + \cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2}$$

$$= K \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos(\phi)}\, d\phi$$

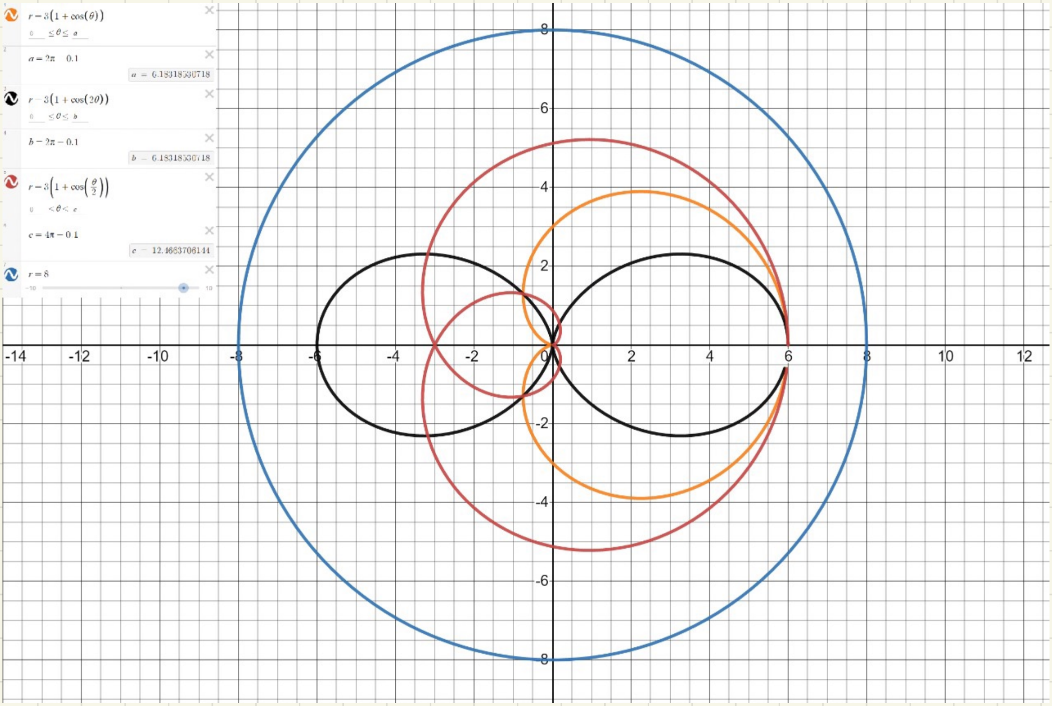
$$= 2K \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos(\phi)}{2}}\, d\phi$$

$$|\cos(\phi)| = \sqrt{\frac{1+\cos(2\phi)}{2}}$$

$$= 2K \int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right| d\phi$$

$$= 2K \left[\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi + \int_{\pi}^{2\pi} -\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi\right]$$

$$= \boxed{8K}$$



r = 3(1 + cos(θ))
0 ≤ θ ≤ a
a = 2π − 0.1
a = 6.18318530718
r = 3(1 + cos(2θ))
0 ≤ θ ≤ b
b = 2π − 0.1
b = 6.18318530718
r = 3(1 + cos(θ/2))
0 ≤ θ ≤ c
c = 4π − 0.1
c = 12.4663706144
r = 8
-10
10
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8

P3. Demuestre que el centro de masa de medio anillo, parametrizado por una semicircunferencia de radio r (centrada en el origen y ubicada en la parte positiva del eje Y), es $(0, \frac{2r}{\pi})$.

$$X_G = \int_\Gamma x\rho \qquad \vec{r}(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$$

$$Y_G = \int_\Gamma y\rho \qquad t \in [0, \pi]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-r\sin(t), r\cos(t))$$

$$M = \int_\Gamma \rho = \int_0^\pi 1 \cdot r \, dt \qquad \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = r$$

$$= \pi r$$

$$M \cdot X_G = \int_0^\pi \underbrace{r\cos(t)}_{x} \cdot \underbrace{1}_{\rho} \cdot \underbrace{r}_{\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|} dt$$

$$= r^2 \int_0^\pi \cos(t) \, dt = 0$$

$$M \cdot Y_G = \int_0^\pi r\sin(t) \cdot 1 \cdot r \, dt$$

$$= r^2 \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = 2r^2$$

$$Y_G = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r$$

$$(X_G, Y_G) = \left(0, \frac{2}{\pi} r\right)$$

P4. Dibuje las lineas de corrientes de los siguientes campos vectoriales.

a) $F(x,y) = (x,y)$

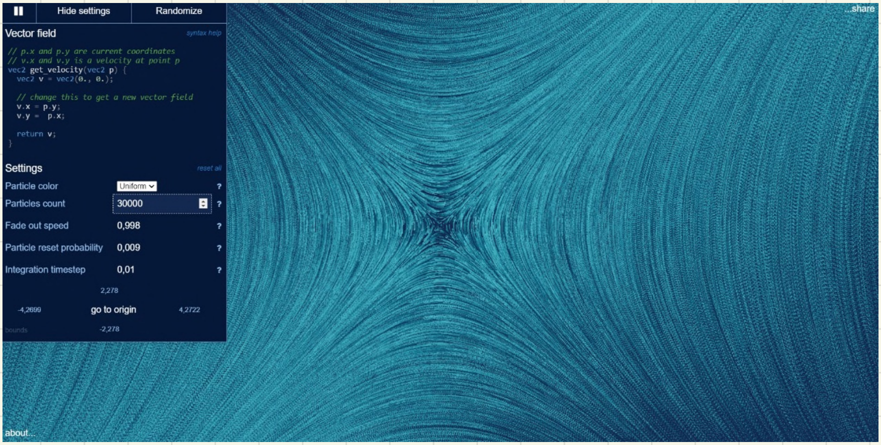
b) $F(x,y) = (1, y^2 - y)$

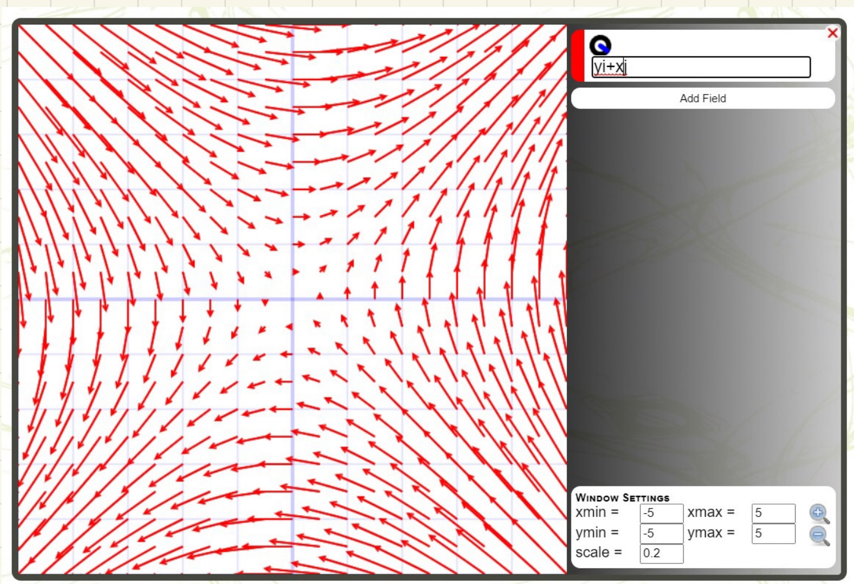
c) $F(x,y,z) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{-z}{x^2+y^2+z^2} \right)$

d) $F(r,\theta,\phi) = \dfrac{K}{r^2}\hat{r}$, para $K>0$ y $K<0$.

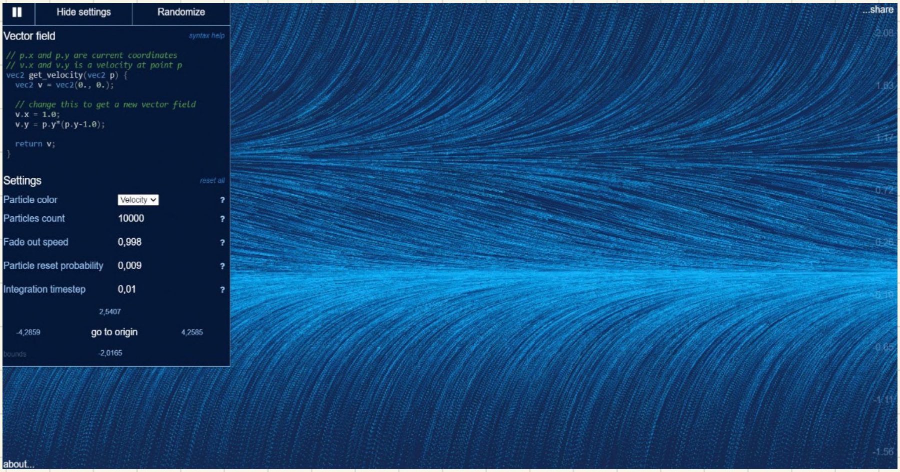
Obs1: El campo *a)* es solenoidal!! Averigüe que es este concepto.
Obs2: El campo *d)* es irrotacional!! Averigüe que es este concepto.

a)

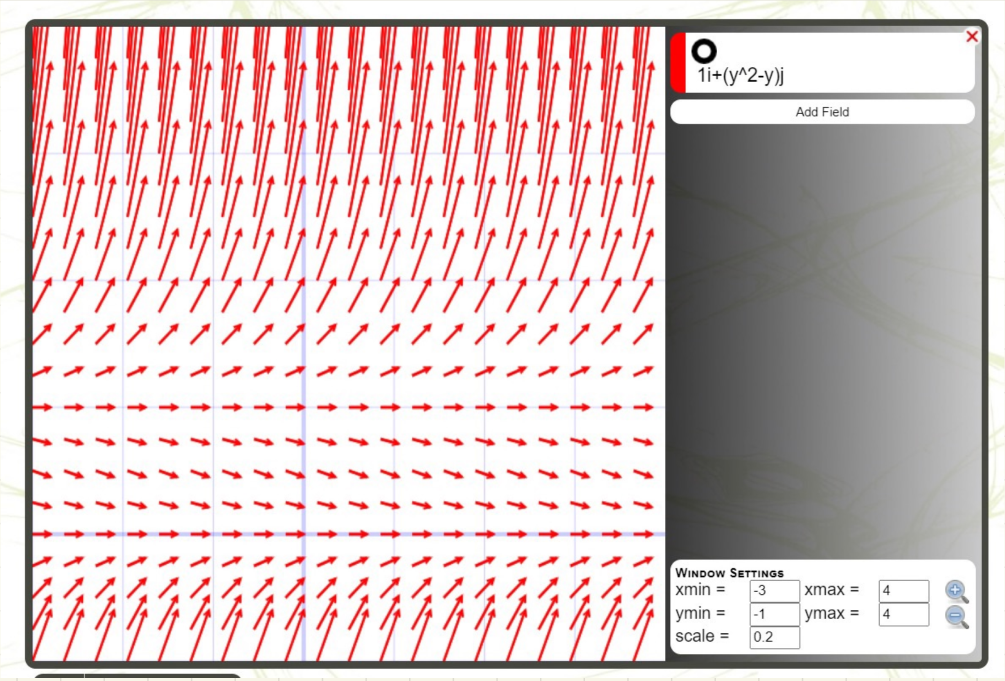




b)

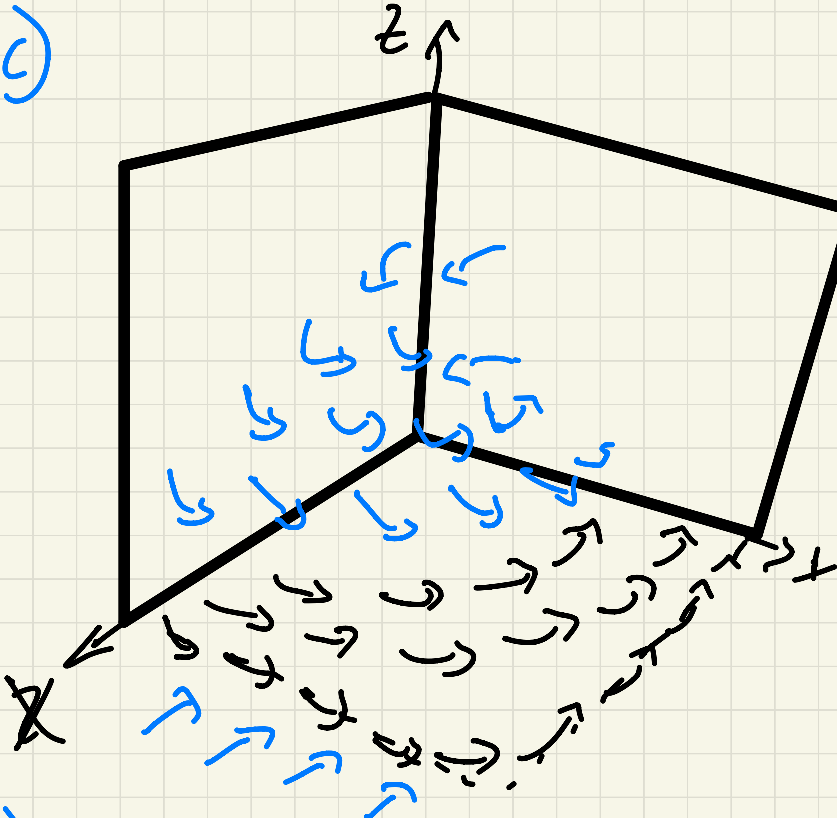


(Ver enlace en descripción)



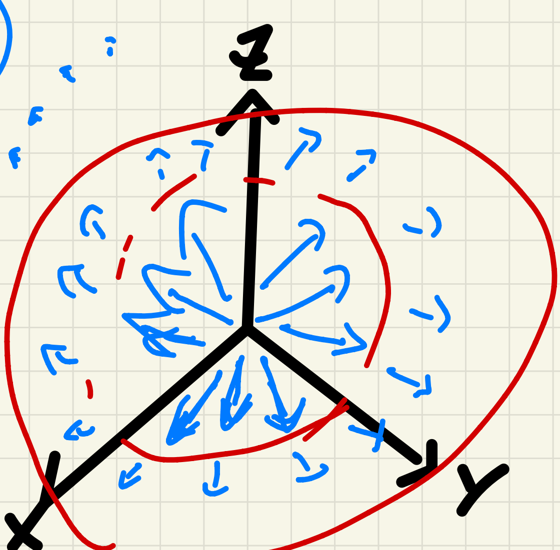
(Ver enlace en descripción)

c)



Obs: Rota y $z>$ $\Rightarrow$ Apunta a $z<$ y Mas empinada

d)



Obs: Apunta en dirección y Mas cercano a O $\ominus$ más grande

(Ver Video explicativo)

Propuestos

P1. Una partícula describe una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$ de tal forma que su altura z cumple que $z = e^{-\theta}$, $\theta \in [0, \infty)$, con θ el ángulo en polares que cumple que:
$x = r(\theta)\cos(\theta)$ e $y = r(\theta)\sin(\theta)$

a) Encuentre una parametrización, indique si es suave, simple, regular y finalmente dibuje la curva

b) Calcule el largo de la curva Γ

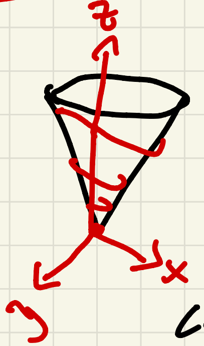
$$x(\theta)^2 + y(\theta)^2 = z(\theta)^2$$

$$r(\theta)^2 [\underbrace{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2}_{1}] = e^{-2\theta}$$

$$r(\theta)^2 = e^{-2\theta} \quad / \sqrt{\ }$$

$$r(\theta) = e^{-\theta}$$

$$\boxed{(e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\sin\theta, e^{-\theta})}$$



Suave ✓

$\cos(\theta)$ "

$e^{-\theta}$ es C^∞ $\Rightarrow$ Multiplicación es C^∞

$\sin(\theta)$ "

Simple (inyectiva)

Sea θ_1 y θ_2 tq que

$$\left.\begin{aligned} e^{-\theta_1}\cos(\theta_1) &= e^{-\theta_2}\cos(\theta_2) \quad (1) \\ e^{-\theta_1}\sin(\theta_1) &= e^{-\theta_2}\sin(\theta_2) \quad (2) \end{aligned}\right\}$$ No lo pesca

$$e^{-\theta_1} = e^{-\theta_2} \quad (3)$$

$(3) \Rightarrow -\theta_1 = -\theta_2 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = \theta_2}$

$\Longrightarrow$ Es inyectiva

$(1)^2 + (2)^2$

$$e^{-2\theta_1}\left[\cancel{\cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2}\right] = e^{-2\theta_2}\left[\cancel{\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2}\right]$$

$$e^{-2\theta_1} = e^{-2\theta_2}$$

Regular

$$r_1'(\theta) = -e^{-\theta}\cos(\theta) - e^{-\theta}\sin(\theta)$$

$$r_2'(\theta) = -e^{-\theta}\sin(\theta) + e^{-\theta}\cos(\theta)$$

$$r_3'(\theta) = -e^{-\theta}$$

$$\left\|\frac{dr}{d\theta}\right\|^2 = e^{-2\theta}\left((\cos(\theta)+\sin(\theta))^2 + (\cos(\theta)-\sin(\theta))^2 + 1\right)$$

$$= e^{-2\theta}(3)$$

$$\left\|\frac{dr}{d\theta}\right\| = e^{-\theta}\sqrt{3} > 0 \implies \text{es regular}$$

$$L = \int_0^\infty \left\|\frac{dr}{d\theta}\right\| d\theta = \int_0^\infty e^{-\theta}\sqrt{3}\, d\theta$$

$$= -e^{-\theta}\Big|_0^\infty \sqrt{3} = \boxed{\sqrt{3}}$$

P2. Sea $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$ y la longitud de la curva $y=f(x)$ entre 0 y x es igual a $e^x - f(x) - 1$. Determine $f(x)$.
Indicación: Utilizar TFC

$$e^x - f(x) - 1 = \int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$$

$(x, f(x))$

$(t, f(t))$

TFC / Derivando

$$e^x - f'(x) = \sqrt{1+f'(x)^2} \quad /()^2$$

$$e^{2x} - 2f'(x)e^x + \cancel{f'(x)^2} = 1 + \cancel{f'(x)^2}$$

$$-2f'(x)e^x = 1 - e^{2x}$$

$$f'(x) = -\left(\frac{e^{-x} - e^x}{2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$f(x) = \cosh(x) + C$$

$$\boxed{\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}}$$

$$0 = f(0) = \cosh(0) + C$$

$$= 1 + C \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \cosh(x) - 1}$$