MA2002-3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Alexis Fuentes
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.**u**chile.cl

Auxiliar 1: Curvas e introducción al Cálculo Vectorial

24 de agosto de 2021

P1. Una hormiga que parte en el origen, sube por el alambre parametrizado (con t positivo) por:

$$r(t) = \left(t^2\cos(t), t^2\sin(t), \frac{t^3}{\sqrt{3}}\right)$$

Esta parametrización es suave, simple y/o regular?. Determine a qué distancia del plano OXY se encuentra la hormiga cuando ha recorrido una distancia $d = \frac{14}{3}$ por el alambre.

P2. Dada una curva C descrita en coordenadas polares por la ecuación $r = f(\phi)$, donde $a \leq \phi \leq b \leq a + 2\pi$, demostrar que la longitud de arco es

$$\int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2} d\phi$$

Utilice este resultado para calcular el largo de la cardioide de ecuación $r = K(1 + \cos(\phi))$.
[**Pregunta Extra??]:** Que sucederá con $r = K(1 + \cos(2\phi))$ o con $r = K(1 + \cos(\phi/2))$

P3. Demuestre que el centro de masa de medio anillo, parametrizado por una semicircunferencia de radio r (centrada en el origen y ubicada en la parte positiva del eje Y), es $(0, \frac{2r}{\pi})$.

P4. Dibuje las lineas de corrientes de los siguientes campos vectoriales.

a) $F(x, y) = (y, x)$

b) $F(x, y) = (1, y^2 - y)$

c) $F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{-z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$

d) $F(r, \theta, \phi) = \frac{K}{r^2}\hat{r}$, para $K > 0$ y $K < 0$.

Obs1: El campo *a)* es solenoidal!! Averigüe que es este concepto.
Obs2: El campo *d)* es irrotacional!! Averigüe que es este concepto.

Propuestos

P1. Una partícula describe una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$ de tal forma que su altura z cumple que $z = e^{-\theta}$, $\theta \in [0, \infty)$, con θ el ángulo en polares que cumple que:
$x = r(\theta)\cos(\theta)$ e $y = r(\theta)\sin(\theta)$

a) Encuentre una parametrización, indique si es suave, simple, regular y finalmente dibuje la curva

b) Calcule el largo de la curva Γ

P2. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y la longitud de la curva $y = f(x)$ entre 0 y x es igual a $e^x - f(x) - 1$. Determine $f(x)$.
Indicación: Utilizar TFC

Resumen

Norma euclidiana de un vector $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \in R^n$: $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ...x_i^2 + .. + x_n^2}$

Una curva Γ es:
1) **Suave:** Si admite una parametrización de clase C^1.
2) **Regular:** Si admite una parametrización $\overrightarrow{r}(t)$ de clase C^1 tal que $\|\frac{dr(t)}{dt}\| > 0$, $\forall t \in [a, b]$.
3) **Simple:** Si admite una parametrización de clase C^1 que sea inyectiva.
4) **Cerrada:** Si admite una parametrización $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que: $r(a) - r(b) = 0$.
5) **Cerrada simple:** Si admite una parametrización $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $r(a) = r(b)$ y que sea inyectiva sobre $[a, b)$.

Sea Γ una curva simple y regular y $\overrightarrow{r}(t)$ regular. Definimos la función longitud de arco $s : [a, b] \to [0, L(\Gamma)]$ como:

$$s(t) := \int_a^t \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}} \right\| d\hat{t}$$

Observación: El caso de $t = b$, entrega exactamente la longitud de curva entre $\overrightarrow{r}(a)$ y $\overrightarrow{r}(b)$.

Integral de Linea Sea $F : \omega \subset R^n \to R^n$ y sea $\Gamma \subset \Omega$, una curva con una parametrización simple y regular $r(t)$, con $t \in [a, b]$, se defina la integral de linea sobre Γ como:

$$\int_\Gamma F := \int_a^b F(r(\hat{t})) \left\| \frac{d\overrightarrow{r}(\hat{t})}{d\hat{t}} \right\| d\hat{t}$$