Hoy Repaso. (PARTIMOS a las 12:02).

Aumento de conjuntos l.i. a bases.

Sea X conjunto l.i en V e.v.

Propiedad:

Existe $Y \subseteq V$ tal que $X \cup Y$ es base.

Ejemplo:

$$\boxed{\text{Sea } A = \{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 = x_3 \\ x_4 = 2x_3 \end{array} \}}$$

¿Base de A?

+ fácil: Generador $\quad x \in A : \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \boxed{2x_3 - x_4 = 0} \end{array}$

$2x_3 = x_4$

$x_3 = \frac{x_4}{2}$.

$$x \in A \iff \begin{array}{cccc} x_1 & & x_3 & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x \in A \iff$ x_4 libre

x_2 libre

$x_3 = x_4/2$

$x_1 = x_3 - x_2 = \frac{x_4}{2} - x_2$.

$$x = \begin{pmatrix} \frac{x_4}{2} - x_2 \\ x_2 \\ x_4/2 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generador de A

$$A = \left\langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right\}}_{\text{es l.i}} \right\rangle$$

tenemos que es base de A

[Extienda la base de A a una base de $\mathbb{R}^4$.]

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿Como se hace?

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Como

$e_1 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ lo agregamos

Como.

$e_2 \in \langle v_1, v_2, e_1 \rangle$?

No lo agregamos

$e_3 \notin \langle v_1, v_2, e_1 \rangle$

Lo agregamos

Al final tenemos

$$\{ v_1, v_2, e_1, e_3 \} = X$$

y argumentamos bases

Veamos que es li

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de la 4ª ecuación $0\lambda_1 + 1\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda_2 = 0}$

de la 3ª ecuación

$$0\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\cancel{\lambda_2}^{\,0} + 0\lambda_3 + 1\lambda_4 = 0$$

$\underline{\lambda_4 = 0}$

de la 2ª ecuación

$$1\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0$$

$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0}$

de la 1ª ecuación

$$-1\cancel{\lambda_1} + \tfrac{1}{2}\cancel{\lambda_2} + 1\lambda_3 + 0\cancel{\lambda_4} = 0$$

$\lambda_3 = 0$

X tiene 4 elementos y es l.i $\Rightarrow$ X es base de $\mathbb{R}^4$.

2º tema: Suma y Suma directa.

Si U, W sev. de V

$$U+W=\{u+w : u\in U,\ w\in W\}$$

La suma es directa $(U\oplus W)$

si $\forall z\in U+W$

$\exists!\, u\in U\ \exists!\, w\in W$ tq $z=u+w$

Propiedad: La suma es e.v.

- $U\oplus W=V \iff V=U+W$ y $U\cap W=\{0\}$

$$\dim U\oplus W=\dim U+\dim V.$$

Ejercicio

Pruebe que si $\{x, y\}$ es base de $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle\{x\}\rangle \oplus \langle\{y\}\rangle$

Dem.| Todo $z \in \mathbb{R}^2$ se escribe de manera única como

$$z = \underbrace{\lambda_1 x}_{\in\langle\{x\}\rangle} + \underbrace{\lambda_2 y}_{\in\langle\{y\}\rangle}$$

$$\Rightarrow z \in \underbrace{\langle\{x\}\rangle + \langle\{y\}\rangle}$$

Concluimos que $\mathbb{R}^2 \subseteq \langle\{x\}\rangle + \langle\{y\}\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$.

$\therefore \mathbb{R}^2 = \langle\{x\}\rangle + \langle\{y\}\rangle$

Veamos $\langle\{x\}\rangle \cap \langle\{y\}\rangle = \{0\}$.

En efecto:

Sea $w \in \langle\{x\}\rangle \cap \langle\{y\}\rangle$

$\Rightarrow \quad w = \lambda_1 x = \lambda_2 y$ para algún $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

luego

$$\underbrace{\lambda_1}\, x - \underbrace{\lambda_2}\, y = 0$$

Como $\{x, y\}$ es un conj. li

$$\begin{aligned} +1\,\lambda_1 &= 0 \\ -1\,\lambda_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$\therefore \quad w = 0x = 0y = 0.$

<u>Propuesto:</u>

Demuestre que si B es base de V

y $A \subseteq B$. $\left[\text{con } \begin{array}{l} A \neq \phi \\ A \neq B \end{array}\right]$

$\Rightarrow \quad V = \langle A \rangle \oplus \langle B \setminus A \rangle.$

3er tema T. Lineales.

Ejemplo:

① Sea $\mathcal{F}$ el e.v. sobre $\mathbb{R}$ de todas las funciones infinitamente diferenciales en $\mathbb{R}$. (Cada $f \in \mathcal{F}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

$$T: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

$$T(f) = \frac{d}{dx} f$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$.

$$T(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \frac{d}{dx}(\lambda_1 f + \lambda_2 g)$$

$$= \lambda_1 \frac{d}{dx} f + \lambda_2 \frac{d}{dx} g = \lambda_1 T(f) + \lambda_2 T(g).$$

② $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ojo:

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & +1 & -1 \\ 0 & +0 & +0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Sx = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

S No es lineal porque.

Propiedad de lineales?

$$S\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$S(0x + 0y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq 0S(x) + 0S(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¿ $\operatorname{Ker} \frac{d}{dx}$? $\qquad \frac{d}{dx} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

$$\operatorname{Ker}\left(\frac{d}{dx}\right) = \left\{ f : \frac{d}{dx} f = 0 \right\}$$

$$= \{ f : f \text{ constante} \}$$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 = x_3 \\ x_4 = 2x_3 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{Tx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Tx = 0 \}$$

$A = \operatorname{Ker} T$

con $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$Tx = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} x$$

$\operatorname{Ker} T = \{x \in \mathbb{R}^4 : Tx = 0\}$

¡Ejemplo!

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})$$

$$T_M : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T_M(x) = Mx$$

¿$\operatorname{Ker} T_M$? ¿$\operatorname{Im} T_M$?

$$\operatorname{Ker} T_M = \{x \in \mathbb{R}^5 : \boxed{Mx = 0}\}$$

Encuentre una <u>base</u> de $\operatorname{Ker} T_M$.

Solución $Mx=0 \iff x$ es sol. del sistema con matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & y_1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & y_2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 2 & y_3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 2 & \end{array}\right) \cdot -2$$

libre

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \end{array}\right)$$

Con esto

$x_5 = x_5$ libre

$x_4 + 2x_5 = 0 \implies x_4 = -2x_5$

x_3 libre

$2x_2 + 3x_3 = 0 \implies x_2 = \frac{-3x_3}{2}$

$x_1 + x_4 + 2x_5 = 0 \implies x_1 = -2x_5 - x_4 = -2x_5 + 2x_5 = 0$

$\therefore$ solucion

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} x_3 \\ x_3 \\ -2x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con esto $x \in \left\langle \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{base de } \operatorname{Ker} T_M} \right\rangle$

Imagen $\quad T_M : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- $\operatorname{Im} T_M \subseteq \mathbb{R}^3$

- Base de $\operatorname{Im} T_M$ $\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Im} T_M = \{ y : \underbrace{Mx = y}$ tiene solución $\}$

$(M \mid y)$ y pivotear

$$Mx = y \iff y = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Como al escalonar

las variables pivotes son

x_1, x_2, x_4 (libres x_5, x_3)

el 1er, el 2º y el 4º vector son

l i

∴ Base buscada

es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$\operatorname{Im} T_M = \mathbb{R}^3$$