P3

viernes, 3 de diciembre de 2021 16:29

P3 Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ matriz simetrica con una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios $v_1, \ldots, v_n$ asociados a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente donde $1 = \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0$

a) Sea $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\alpha_i = \langle u, v_i \rangle$, que $\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ y $Au = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i v_i$

b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ y $w = Au - \langle u, v_1 \rangle v_1$. Pruebe que $\langle w, v_1 \rangle = 0$

c) Sea $u \in R^n$. Pruebe que si $\langle u, v_1 \rangle = 0$, entonces $\langle Au, v_1 \rangle = 0$ y $||Au||^2 \leq \lambda_2^2 ||u||^2$

d) Para w definido en b, pruebe que $||A^m w|| \leq \lambda_2^m ||w||$ para todo $m \geq 1$. Concluya que si $u \in R^n$ y $m \geq 0$ entonces:

$$||A^{m+1}u - \langle u, v_1 \rangle v_1|| \leq \lambda_2^m ||Au - \langle u, v_1 \rangle v_1|| \underset{m \to \infty}{\to} 0$$

$$\overbrace{\langle v_i, v_i \rangle = 1}^{(1)} \wedge \overbrace{\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \forall i = j}^{(2)}$$

a) $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^n$

$$\langle u, v_i \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_i \rangle = \langle \alpha_i v_i, v_i \rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = \alpha_i$$

* $\langle u, v_1 \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \ldots \alpha_n v_n, v_1 \rangle$

$$= \langle \alpha_1 v_1, v_1 \rangle + \langle \alpha_2 v_2, v_1 \rangle + \ldots + \langle \alpha_n v_n, v_1 \rangle$$
$$= \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle v_2, v_1 \rangle + \ldots + \alpha_n \langle v_n, v_1 \rangle$$
$$= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 \qquad + \alpha_n \cdot 0$$

$$\langle u, u \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\langle v_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \rangle}$$
$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \alpha_i$$
$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

$$Au = A \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$
$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i A v_i \qquad Av_i = \lambda_i v_i \text{ ya que } v_i \text{ es vector propio}$$
$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i v_i)$$
$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i v_i$$

b) $w = Au - \underbrace{\langle u, v_1 \rangle} v_1$ PDQ $\langle w, v_1 \rangle = 0$

$w = Au - \alpha_1 v_1$ $u \in \mathbb{R}^n$ y como $(v_i)_{i=1}^{n}$ li $\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$$\langle Au - \alpha_1 v_1, v_1 \rangle = \langle Au, v_1 \rangle - \langle \alpha_1 v_1, v_1 \rangle$$
$$= \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i v_i, v_1 \rangle - \alpha_1$$
$$= \lambda_1 \alpha_1 - \alpha_1$$
$$= \alpha_1 - \alpha_1 \text{ (ya que } \lambda_1 = 0)$$
$$= 0$$

c) Si $\langle u, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow w = Au$

Y como $\langle w, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle Au, v_1 \rangle = 0$

$$\langle Au, Au \rangle = \langle Au, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \langle Au, \alpha_i \lambda_i v_i \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \langle Au, v_i \rangle$$

Como $\langle Au, v_1 \rangle = 0$

$$= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i \langle Au, v_i \rangle$$
$$= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i v_i, v_i \rangle$$
$$= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i^2 \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_i \rangle$$
$$= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i^2$$

Y como $\lambda_2 > \lambda_i \ \forall i > 2$

$$\leq \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 \lambda_2^2$$
$$= \lambda_2^2 \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2$$

$$\leq \lambda_2^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \quad (\text{ya que } \alpha_1^2 \geq 0)$$

$$\leq \lambda_2^2 \|u\|_2^2$$

d) PDQ $\|A^m w\| \leq \lambda_2^m \|w\| \quad \forall\ m \geq 1$

$\langle w, v_1 \rangle = 0$ Por definición de w

$\|Aw\|^2 \leq \lambda_2^2 \|w\|^2$ Por lo demostrado en c)

$\Rightarrow \|Aw\| \leq \lambda_2 \|w\|$

Como $\langle w, v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle Aw, v_1 \rangle = 0$

$\therefore \|A(Aw)\|^2 \leq \lambda_2^2 \|Aw\|^2 \leq \lambda_2^2 \lambda_2^2 \|w\|^2$

Por inducción:

HI: $\|A^k w\| \leq \lambda_2^k \|w\|$

Demostremos para $k+1$:

$\langle A^{k+1} w, v_1 \rangle = 0$ ya que $\langle w, v_1 \rangle = 0$

Por c) $\|A^{k+1} w\| \leq \lambda_2 \|A^k w\| \leq \lambda_2 \cdot \lambda_2^k \|w\|$

$$\|A^{k+1} w\| \leq \lambda_2^{k+1} \|w\|$$

Como $\lambda_2 < 1$

$$\lim_{m \to \infty} \|A^m w\| \leq \underbrace{\lim_{m \to \infty} \lambda_2^m}_{0} \|w\|$$

$$\Rightarrow \|A^m w\| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$