P1

lunes, 22 de noviembre de 2021 23:16

P1 a) Dada $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ diagonalizable, pruebe que si A tiene sólo un valor propio, entonces $A = \alpha I,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

b) Para $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal, pruebe que A^T es diagonalizable y que las columnas de $(P^T)^{-1}$ forman una base de vectores propios de A^T

c) Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, tal que $AA^T = I$, demuestre que $det(A) \in \{-1, 1\}$

a) Como A es diagonizable $A = PDP^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I, \text{ con } \lambda \text{ valor propio de } A.$$

$$A = P \cdot (\lambda I) P^{-1}$$
$$A = \lambda\, \underbrace{P I P^{-1}}$$
$$A = \lambda\, PP^{-1} = \lambda I$$

b) $A = PDP^{-1}$, $A^T = (PDP^{-1})^T$

$$= (P^{-1})^T D^T P^T$$
$$= (P^T)^{-1} D\, P^T$$

$\therefore A^T$ es diagonizable

c) $AA^T = I$

$$det(AA^T) = det(I)$$
$$det(A)\,det(A^T) = 1$$
$$(det(A))^2 = 1$$
$$\Rightarrow det(A) = \pm 1$$

P2

lunes, 22 de noviembre de 2021 23:31

P2 Sea $A_1 = (a) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ y $A_n \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), n \geq 2$, una matriz tridiagonal con $\begin{cases} (A_n)_{i,j} = a & \text{Si } i = j \\ (A_n)_{i,j} = b & \text{Si } i = j+1 \\ (A_n)_{i,j} = c & \text{Si } i = j-1 \end{cases}$

a) Calcule el polinomio característico de A_4.

b) Use la definición de determinante para mostrar que $|A_n|$ satisface la recurrencia

$$|A_{n+2}| = a|A_{n+1}| - bc|A_n|, n \geq 1.$$

a) $A_4 = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & a & c & 0 \\ 0 & b & a & c \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$ $\quad p(\lambda) = \det(A_4 - \lambda I)$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & c & 0 & 0 \\ b & a-\lambda & c & 0 \\ 0 & b & a-\lambda & c \\ 0 & 0 & b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\cdot|A_3 - \lambda I| - c\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ 0 & a-\lambda & c \\ 0 & b & a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)|A_3 - \lambda I| - bc\,|A_2 - \lambda I|$$

$$|A_2 - \lambda I| = (a-\lambda)^2 - bc$$

$$|A_3 - \lambda I| = (a-\lambda)\,|A_2 - \lambda I| - bc(a-\lambda)$$

$$|A_3 - \lambda I| = (a-\lambda)^3 - (a-\lambda)bc - bc(a-\lambda)$$

$$= (a-\lambda)^3 - 2bc(a-\lambda)$$

$$p(\lambda) = (a-\lambda)\left((a-\lambda)^3 - 2bc(a-\lambda)\right) - bc\left((a-\lambda)^2 - bc\right)$$

$$= (a-\lambda)^4 - 2bc(a-\lambda)^2 - bc(a-\lambda)^2 + b^2c^2$$

$$= (a-\lambda)^4 - 3bc(a-\lambda)^2 + b^2c^2$$

b) $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A^{i1}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} |A^{1i}| = |A^T|$

En el caso:

$$|A_{n+2}| = a|A_{n+1}| - c \underbrace{\begin{vmatrix} b & c & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a & c & & \vdots \\ \vdots & b & a & c & \vdots \\ \vdots & & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{vmatrix}}_{b\cdot|A_n|}$$

$$\Rightarrow |A_{n+2}| = a|A_{n+1}| - bc|A_n|$$

P3

viernes, 3 de diciembre de 2021 15:51

P3 Calcule los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad A^{-1}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 13 & 6 & 8 & 9 & 11 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 77 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 80 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 15 & 100 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 - 4(2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5)$$

$$= \underbrace{45 - 48} - 4(18 - 24) + 7(12 - 15)$$

$$= -3 \quad - 4(-6) + 7(-3)$$

$$= -3 + 24 - 21$$

$$= 0$$

- $B = A^T \Rightarrow |B| = |A| = 0$

- Permutar fila 1 y 2 de A:

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad |A'| = (-1)|A|$$

Permutar fila 2 y 3 de A'

$$A'' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = C \qquad |A''| = (-1)^2 |A|$$

$$\Rightarrow |C| = |A| = 0$$

- Permutar columna 1 y 3 de A

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow |D| = (-1)|A| \Rightarrow |D| = 0$$

- $|A^{-1}|$ $\nexists$ ya que $|A| = 0$

- $|E| = 0$ ya que fila 1 y fila 6 son iguales

P4

martes, 23 de noviembre de 2021 03:48

Sean A, B matrices de $n \times n$ con coeficientes reales tales que $AB = BA$

a) Pruebe que si $Bv \neq 0$ y v es vector propio de A asociado a λ entonces Bv también lo es

b) Suponiendo que los valores propios de A son distitnos entre sí, muestre que si v es vector propio de A entonces v es vector propio de B

c) Cpncluya que si los valores propios de A son distintos entre sí entonces B es diagonalizable.

$AB = BA$

a) Si v es vector propio asociado a λ

$$Av - \lambda v = 0$$

$$BAv - \lambda Bv = 0$$
$$ABv - \lambda Bv = 0$$

Bv es vector propio asociado a λ

b) Por lo visto en a) si v es vector propio asociado entonces Bv es vector propio asociado al mismo λ

Como tenemos por hipotesis que todos los valores propios son distintos, entonces Bv y v son el mismo vector salvo diferencia en magnitud.

$\Rightarrow Bv = K \cdot v$ con $K \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow Bv - Kv = 0$ $\therefore$ v es vector propio de B asociado a K.

c) Como todos los valores propios de A son distintos entre sí, entonces $\exists$ $v_1, \dots, v_n$ vectores propios de A l.i. y como por b) $v_1, \dots, v_n$ también son vectores propios de B.

$\Rightarrow B$ es diagonalizable.