MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Vicky Andaur O. & Félix Brokering P.
30 de noviembre de 2021

Guía C3: Diagonalización

P1 Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores propios de A

b) De una base ortonormal de vectores porpios de A

c) Encontrar una matriz $P \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ y $D \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$, D diagonal, tal que $A = PDP^t$

d) Es A una matriz invertible, justifique su respuesta

P2 Sea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

y W el sub espacio generado por A.

a) Extraiga de A una base de W

b) Ortonormalice la base encontrada.

c) Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ que contenga la base de b)

P3 Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ matriz simetrica con una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios $v_1, \ldots, v_n$ asociados a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente donde $1 = \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0$

a) Sea $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\alpha_i = \langle u, v_i \rangle$, que $\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ y $Au = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i v_i$

b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ y $w = Au - \langle u, v_1 \rangle v_1$. Pruebe que $\langle w, v_1 \rangle = 0$

c) Sea $u \in R^n$. Pruebe que si $\langle u, v_1 \rangle = 0$, entonces $\langle Au, v_1 \rangle = 0$ y $||Au||^2 \leq \lambda_2^2 ||u||^2$

d) Para w definido en b, pruebe que $||A^m w|| \leq \lambda_2^m ||w||$ para todo $m \geq 1$. Concluya que si $u \in R^n$ y $m \geq 0$ entonces:

$$||A^{m+1}u - \langle u, v_1 \rangle v_1|| \leq \lambda_2^m ||Au - \langle u, v_1 \rangle v_1|| \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

P4 Considere las siguientes matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule los valores y vectores propios de las matrices A, B y C. Diga cuales de ellas son diagonalizables

P5 a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable y $k \leq n$. Se conoce la siguiente factorización de A:

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & \lambda_k & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

donde $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda_i \neq 0, \forall i$. Si definimos:

$$A^{+} = P\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & \frac{1}{\lambda_k} & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

probar que $A^{+} \cdot A = A \cdot A^{+}$ y que $A + \cdot A = P \cdot \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diga cuales son los valores propios de $A \cdot A^{+}$

b) Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$A_n = \begin{pmatrix} w & -1 & 0 & . & . & . \\ 0 & w & -1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & w & -1 \\ w & . & . & . & w & w \end{pmatrix}$$

donde $n \geq 2$, $w \in \mathbb{R}$. Denotemos por $V_n = det(A_n)$. Probar por inducción que $V_n = \sum_{k=1}^{n} w^k$ (Indicación: Pruebe que $V_n = V_{n-1} + w^n$)

P6 Encuentre todos los valores de los parámetros reales α y β de modo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sea diagonalizable.

P7 Sean $R, S \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ con S invertible. Considere $A = R \cdot S$ y $B = S \cdot R$

a) Pruebe que $v \in R^n$ es vector propio de A asociado al valor propio de $\lambda \in R$ ssi Sv es vector propio de B asociado al mismo valor propio. Concluya que A y B tienen los mismos valores propios.

b) Sean $U_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n)$ el subespacio propio de A asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ y $U_\lambda(B)$ el sub espacio propio de B asociado a λ. Pruebe que $dim(U_\lambda(A)) = dim(U_\lambda(B))$

c) Pruebe que A es diagonalizable ssi B es diagonalizable