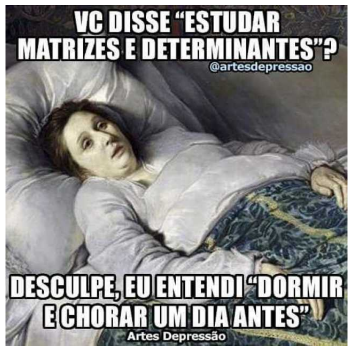
MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Vicky Andaur O. & Félix Brokering P.
23 de noviembre de 2021

Auxiliar 12



P1
a) Dada $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ diagonalizable, pruebe que si A tiene sólo un valor propio, entonces $A = \alpha I,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

b) Para $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal, pruebe que A^T es diagonalizable y que las columnas de $(P^T)^{-1}$ forman una base de vectores propios de A^T

c) Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, tal que $AA^T = I$, demuestre que $det(A) \in \{-1, 1\}$

P2 Sea $A_1 = (a) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ y $A_n \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), n \geq 2$, una matriz tridiagonal con $\begin{cases} (A_n)_{i,j} = a & \text{Si } i = j \\ (A_n)_{i,j} = b & \text{Si } i = j+1 \\ (A_n)_{i,j} = c & \text{Si } i = j-1 \end{cases}$

a) Calcule el polinomio característico de A_4.

b) Use la definición de determinante para mostrar que $|A_n|$ satisface la recurrencia

$$|A_{n+2}| = a|A_{n+1}| - bc|A_n|, n \geq 1.$$

P3 Calcule los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad A^{-1}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 13 & 6 & 8 & 9 & 11 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 77 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 80 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 15 & 100 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P4 Sean A, B matrices de $n \times n$ con coeficientes reales, tales que $AB = BA$

a) Pruebe que si $Bv \neq 0$ y v es vector propio de A asociado a λ entonces Bv también lo es

b) Suponiendo que los valores propios de A son distintos entre sí, muestre que si v es vector propio de A entonces v es vector propio de B

c) Concluya que si los valores propios de A son distintos entre sí entonces B es diagonalizable.

Resumen

(1) Propiedades del determinante:

(i) $|I| = 1$.

(ii) Si A es triangular superior, entonces $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_i i$.

(iii) A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$.

(iv) $|AB| = |A| \cdot |B|$.

(v) $|A| = |A^T|$.

(vi) Si B se obtiene de A permutando dos filas/columnas, entonces $|B| = -|A|$.

(vii) El determinante de una matriz no cambia frente a operaciones elementales de filas y columnas.

(viii) Si $\tilde{A}$ es una versión escalonada de A, y N es la cantidad de permutaciones de filas/columnas realizadas, entonces

$$|A| = (-1)^N \cdot |\tilde{A}| = (-1)^N \cdot \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii}$$

(2) Valores/Vectores propios: Dada una matriz A y un valor propio λ, definimos el subespacio propio W_λ según

$$W_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I).$$

En particular $W_0 = \mathrm{Ker}A$.
Prop.: Los vectores propios asociados a valores propios distintos, son linealmente independientes.

(3) Multiplicidades: Dada una matriz A y un valor propio λ definimos

(1) **Multiplicidad algebraica:** Mayor potencia de $(x - \lambda)$ que divide al polinomio característico de A. Se denota por n_λ o $\alpha_A(\lambda)$.

(2) **Multiplicidad geométrica:** Dimensión del subespacio propio W_λ. Se denota por m_λ o $\gamma_A(\lambda)$.

Se tiene que $1 \leq m_\lambda \leq n_\lambda$.

(4) Diagonalización: Decimos que una matriz A es diagonalizable, si $\mathbb{K}^n$ admite una base de vectores propios de A.
Son equivalentes:

1. A es diagonalizable.
2. A se puede escribir como $A = PDP^{-1}$ con D diagonal.
3. Para todo valor propio λ de A, $m_\lambda = n_\lambda$.
4. Podemos escribir $\mathbb{K}^n = W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_n}$.
5. La suma de multiplicidades geométricas es n.