MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Vicky Andaur O. & Félix Brokering P.
9 de noviembre de 2021

Auxiliar 10: Preparación Control 2

P1: [C2: 2009-02] Sea V un espacio vectorial con base $B = \{u, v, w\}$ y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T(u) = v - w$; $T(v) = u + v$; $T(w) = u + 2v - w$

a) Determine la matriz representante de T, $M_{BB}(T)$, con respecto a las bases B y B.

b) Sea L el subespacio vectorial de V generado por el vector $x = 2u + 3v - w$. Encuentre los siguiente subespacios y sus dimensiones:

- $T(L)$
- $L \cap Ker(T)$
- $L + Ker(T)$
- $Im(T)$

P2: [C2: 2012-02] Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales. Se definen los subconjuntos:

$$U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(x) = p(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$
$$V = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : -p(x) = p(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

a) Pruebe que U y V son subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

b) Muestre que $B = \{1 + x^2, , 1 - x^2\}$ es una base de U

c) Encuentre una base de V y determine su dimensión.

d) Pruebe que $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = U + V$

e) Determine si $U + V$ es suma directa (Esto es, si $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$).

P3: [C2: 2017-02] Pruebe o de un contraejemplo en cada caso:

a) Existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to R^3$ tal que:

$$Ker(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y además

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es biyectiva.

c) Existe una transformación lineal y biyectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{22}$.

d) Existen dos subespacios vectoriales U, V de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2 tal que $U \oplus V = \mathbb{R}^4$

Resumen

Def-proposición (Subespacio vectorial) Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. $U \neq \emptyset$, es subespacio vectorial (s.e.v) de V ssi: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, \forall u_1, u_2 \in U, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$.
Definicion: l.i. l.d. Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, diremos que estos vectores son linealmente dependientes (l.d.) ssi: existen escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$, no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. En caso contrario, son (l.i.)
Def: Base Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, diremos que el conjunto de vectores $vi_{i=1}^n$ es una base de V ssi: $vi_{i=1}^n$ es (l.i.) y genera el espacio.
Definición (Núcleo) Sea una transformación lineal $T : U \to V$. Definimos el núcleo de T como el conjunto:

$$KerT = \{x \in U | T(x) = 0\}.$$

Definición (Imagen) Sea una transformación lineal $T : U \to V$. Definimos la imagen de T como el conjunto:

$$ImT = T(U) = \{v \in V | \exists u \in U : v = f(u)\}$$

Def: Dimensión Cardinalidad de la base
Def: Rango y Nulidad Rango=dim(Im(T)) Nulidad=dim(Ker(T))
Definición (Suma directa) Sea un espacio vectorial V y dos subespacios vectoriales U, W de V . Diremos que el subespacio $Z = U + W$ es suma directa de U y W, notado $U \oplus W = Z$, si $\forall v \in Z, v$ se escribe de manera única como $v = u + w, u \in U, w \in W$.
Prop. Suma directa $Z = U \oplus W$ ssi $U \cap W = \{0\} \wedge U + W = Z$
Teorema del núcleo imagen (TNI):
Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $T : U \to V$ una transformación lineal, $dimU < \infty$. Entonces:

$$dimU = dimKerT + dimImT$$

. **Teorema 3.4. Sea** $T : U \to V$ **aplicación lineal**.

1. Si $dimU = dimV$ entonces T inyectiva $\iff$ T epiyectiva $\iff$ T biyectiva.
2. Si $dimU > dimV$ T no puede ser inyectiva.
3. Si $dimU < dimV$ T no puede ser epiyectiva.
4. Como conclusión de (2) y (3) U isomorfo a $V \iff dimU = dimV$.

Matriz representante:

Sea $T\colon U \to V$ lineal y $\beta_U = \{u_1, ..., u_n\}$ y $\beta_V = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de U y V, respectivamente. Entonces llamaremos matriz representante de T con respecto a las bases β_U y β_V a la matriz obtenida de los coeficientes en la descomposición de cada $T(u_i)$ en la base β_V. Concretamente,

$$\begin{array}{ccccccc} T(u_1) & = & a_{11}v_1 & + & a_{21}v_2 & + \cdots + & a_{m1}v_m \\ T(u_2) & = & a_{12}v_1 & + & a_{22}v_2 & + \cdots + & a_{m2}v_m \\ \vdots & & & & & & \\ T(u_n) & = & a_{1n}v_1 & + & a_{2n}v_2 & + \cdots + & a_{mn}v_m \end{array} \implies M_{\beta_U \beta_V}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Composición:

Sean $T\colon U \to V$, $L\colon V \to W$ lineales y $\beta_U, \beta_V, \beta_W$ bases de U, V, W respectivamente. Entonces

$$M_{\beta_U \beta_W}(L \circ T) = M_{\beta_V \beta_W}(L) M_{\beta_U \beta_V}(T).$$

En particular si tenemos dos bases $\alpha, \overline{\alpha}$ de U y $\beta, \overline{\beta}$ de V, podemos considerar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
U, \alpha \arrow[r, "M_{\alpha\beta}(T)"] \arrow[d, "M_{\alpha\overline{\alpha}}(id_U)"'] & V, \beta \\
U, \overline{\alpha} \arrow[r, "M_{\overline{\alpha\beta}}(T)"'] & V, \overline{\beta} \arrow[u, "M_{\overline{\beta}\beta}(id_V)"']
\end{tikzcd}
$$