MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Vicky Andaur O. & Félix Brokering P.
26 de octubre de 2021

Pauta Auxiliar 8: Cambios de base y matrices representantes

P1 Considere $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y la transformación lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = (1 + \sqrt{3}i)z$.

a) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base canónica $\beta_C = \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$, es decir, $M_{\beta_C\beta_C}(T)$

$$T(1) = 1 + \sqrt{3}i = 1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot i$$
$$T(i) = i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} \cdot 1 + 1 \cdot i$$

Por lo tanto:

$$M_{\beta_C\beta_C}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

b) Usando matrices de cambio de base, determine la matriz representante de T con respecto a la base $\beta = \{1 + i, 1 - i\}$. Es decir, $M_{\beta\beta}(T)$. Explicite todas las matrices usadas

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}, \beta \arrow[r, "M_{\beta\beta}(T)"] \arrow[d, "M_{\beta\beta_C}(id_{\mathbb{C}})"'] & \mathbb{C}, \beta_C \\ \mathbb{C}, \beta_C \arrow[r, "M_{\beta_C\beta_C}(T)"'] & \mathbb{C}, \beta_C \arrow[u, "M_{\beta_C\beta}(id_{\mathbb{C}})"'] \end{tikzcd}$$

Para simplificar el análisis es importante recordar que $M_{\beta_C\beta}(id) = (M_{\beta\beta_C}(id))^{-1}$

$$M_{\beta\beta}(T) = M_{\beta_C\beta}(id) \cdot M_{\beta_C\beta_C}(T) \cdot M_{\beta\beta_C}(id)$$
$$M_{\beta\beta}(T) = (M_{\beta\beta_C}(id))^{-1} \cdot M_{\beta_C\beta_C}(T) \cdot M_{\beta\beta_C}(id)$$

Así que solo nos falta calcular $M_{\beta\beta_C}(id_{\mathbb{C}})$

$$id(1+i) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i$$
$$id(1-i) = 1 \cdot 1 + -1 \cdot i$$

Por lo tanto:

$$M_{\beta\beta_C}(id_{\mathbb{C}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y la inversa es:

$$(M_{\beta\beta_C}(id_{\mathbb{C}}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Finalmente tenemos que:

$$M_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

P2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Considere la transformación lineal

$$T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) Determine los subespacios $ker(T)$ e $Im(T)$ y encuentre una base y la dimensión de cada uno.

Sabemos que si $X \in ker(T) \iff T(X) = 0$. Entonces, sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $T(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que se tienen 2 variables libres $a = -2c, b = -2d$:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son l.i. tenemos una base para el $Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $dim(Ker(T)) = 2$.
Por TNI, tenemos que: $dim(\mathcal{M}_{2,2}) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$
$dim(\mathcal{M}_{2,2}) = 4$, por lo tanto $dim(Im(T)) = 2$

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Escogemos 2 matrices l.i., por lo que tenemos una base de la $Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

b) Encuentre M matriz representante de T con respecto a la base canónica

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

en el espacio de partida y de llegada.

$$\begin{aligned}
T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

c) Encuentre M_2 matriz representante de T con respecto a la base:

$$\hat{\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

en el espacio de partida y de llegada. Puede dejarla en función de $M_{\beta\hat{\beta}}(id)$ y $M(T)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{2,2}, \hat{\beta} \arrow[r, "M_2(T)"] \arrow[d, "M_{\hat{\beta}\beta}(id)"'] & \mathcal{M}_{2,2}, \hat{\beta} \\
\mathcal{M}_{2,2}, \beta \arrow[r, "M(T)"'] & \mathcal{M}_{2,2}, \beta \arrow[u, "M_{\beta\hat{\beta}}(id)"']
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, solo tenemos que calcular: $M_{\beta\hat{\beta}}(id)$

$$\begin{aligned}
id\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= 0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
id\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
id\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
id\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) &= 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$M_{\beta\hat{\beta}}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$M_2(T) = (M_{\beta\hat{\beta}}(id))^{-1} \cdot M(T) \cdot M_{\beta\hat{\beta}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Aquí se utilizó un programa para calcular $M_{\beta\hat{\beta}}^{-1}$ y luego multiplicar las matrices, pero la inversa se puede calcular usando el método de gauss jordan visto en clases y la multiplicación es la usual multiplicación de matrices. Solo que es muy engorroso y no es lo que se busca en la resolución del problema.

P3 [Aplicaciones TNI]

a) Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal tal que $dim(V) < \infty$. Demuestre que:

$$V = Ker(T) \oplus Im(T) \iff Ker(T^2) = Ker(T)$$

Recordemos una caracterización de $U \oplus W = V$ vista en el auxiliar 6: $U + W = V \wedge U \cap W = \{0\}$

($\Rightarrow$) Notemos que: $Ker(T) \subseteq Ker(T^2)$ para toda transformación lineal. Por lo que solo basta probar la otra inclusión. Sea $x \in Ker(T^2) \iff T(T(x)) = 0$. Por lo tanto, $T(x) \in Ker(T)$ y también $T(x) \in Im(T)$. Como $Ker(T) \oplus Im(T)$, concluimos que $T(x) = 0$, lo que implica que $x \in Ker(T)$

($\Leftarrow$) Veamos primero que $Im(T) \cap Ker(T) = \{0\}$. En efecto, sea $x \in Im(T) \cap Ker(T)$, luego $T(x) = 0$ y $x = T(y)$, entonces $T(T(y)) = 0$, luego $y \in Ker(T^2)$ y como $Ker(T^2) = Ker(T)$, entonces $y \in Ker(T)$. Por lo que $T(y) = 0 = x$. Con lo que concluimos que $Ker(T) \cap Im(T) = \{0\}$.
Sabemos que $Ker(T) \oplus Im(T)$ es un s.e.v de V y por TNI tenemos que $dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(V)$. Entonces $dim(Ker(T) \oplus Im(T)) = dim(V)$. Por lo tanto $Ker(T) \oplus Im(T) = V$

b) Sea A una matriz de 2×2 y $k \geq 2$. Demuestre que:

$$A^k = 0 \iff A^2 = 0$$

Tenemos que si $A^2 = 0$, entonces $A^k = 0$ y supongamos por contradicción que $A^2 \neq 0$ y $A^k = 0$. Definamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, como

$$f(x) = Ax$$

Notemos que f no puede ser biyectiva (sino $A^k = 0$) y por lo tanto no es inyectiva y el $Ker(f) \neq \{0\}$. Además como $A \neq 0$, (ya que sino $A^2 = 0$) $Ker(f) \neq \mathbb{R}^2$. Por TNI:

$$dim(\mathbb{R}^2) = dim(Im(f)) + \underbrace{dim(Ker(f))}_{\neq 0, \neq 2}$$

Por lo tanto $rango(f) = 1 = \nu(f)$.
Definamos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como:

$$g(x) = A^2 x$$

Por el mismo argumento anterior, $rango(g) = \nu(g) = 1$. Notando que $g = f^2$, vemos que $Im(g)$ es s.e.v de la $Im(f)$ y además, de igual dimensión, es decir $Im(g) = Im(f)$. Entonces:

$$A^2 x = A \underbrace{(Ax)}_{\in Im(f)}$$

Como $Ax \in Im(f)$, entonces $Ax \in Im(g)$ y por lo tanto $\exists x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $Ax = A^2 x_0$, luego:

$$A^2 x = A^3 x_0 = A^2 \underbrace{(Ax_0)}_{\in Im(f)}$$

Por inducción $A^2 x = A^k x_{k-3} = 0$, para todo x, es decir $Ker(g) = \mathbb{R}^2$. CONTRADICCION

c) Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una función lineal. Demuestre que para todo subespacio $K \subset W$ se tiene que:

$$dim(f^{-1}(K)) = dim(K \cap Im(f)) + dim(Ker(f))$$

Definamos $g : f^{-1}(K) \subseteq V \to K \subseteq W$ como:

$$g(x) = f(x)$$

Como f es lineal, entonces g es lineal, aplicando el TNI sobre g:

$$dim(f^{-1}(K)) = dim(Im(g)) + dim(Ker(g))$$

Notemos que $Im(g) = K \cap Im(f)$, ya que por lo visto en introducción al álgebra:

$$Im(g) = f(f^{-1}(K)) = K \cap f(A) = K \cap Im(f)$$

Además:

$$\begin{aligned} Ker(g) &= \{x \in f^{-1}(K) : f(x) = 0\} \\ &= f^{-1}(K) \cap \{x \in V : f(x) = 0\} \\ &= f^{-1}(K) \cap Ker(f) \end{aligned}$$

Como $Ker(f) = f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}(K)$. Tenemos que $Ker(g) = Ker(f)$
Reemplazando:

$$dim(f^{-1}(K)) = dim(K \cap Im(f)) + dim(Ker(f))$$

Resumen

Matriz representante:

Sea $T\colon U \to V$ lineal y $\beta_U = \{u_1, ..., u_n\}$ y $\beta_V = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de U y V, respectivamente. Entonces llamaremos matriz representante de T con respecto a las bases β_U y β_V a la matriz obtenida de los coeficientes en la descomposición de cada $T(u_i)$ en la base β_V. Concretamente,

$$\begin{array}{ccccccc} T(u_1) & = & a_{11}v_1 & + & a_{21}v_2 & +\cdots+ & a_{m1}v_m \\ T(u_2) & = & a_{12}v_1 & + & a_{22}v_2 & +\cdots+ & a_{m2}v_m \\ \vdots & & & & & & \\ T(u_n) & = & a_{1n}v_1 & + & a_{2n}v_2 & +\cdots+ & a_{mn}v_m \end{array} \implies M_{\beta_U\beta_V}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Composición:

Sean $T\colon U \to V$, $L\colon V \to W$ lineales y $\beta_U, \beta_V, \beta_W$ bases de U, V, W respectivamente. Entonces

$$M_{\beta_U\beta_W}(L \circ T) = M_{\beta_V\beta_W}(L)M_{\beta_U\beta_V}(T).$$

En particular si tenemos dos bases $\alpha, \overline{\alpha}$ de U y $\beta, \overline{\beta}$ de V, podemos considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U, \alpha \arrow[r, "T"] \arrow[d, "id_U"'] & V, \beta \\ U, \overline{\alpha} \arrow[r, "T"'] & V, \overline{\beta} \arrow[u, "id_V"'] \end{tikzcd}$$

Teorema del núcleo imagen (TNI):
Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $T : U \to V$ una transformación lineal, $dim(U) < \infty$. Entonces:

$$dim(U) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$$

.