MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Vicky Andaur O. & Félix Brokering P.
26 de octubre de 2021

Auxiliar 8: Cambios de base y matrices representantes

P1 Considere $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y la transformación lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = (1 + \sqrt{3}i)z$.

a) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base canónica $\beta_C = \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$, es decir, $M_{\beta_C\beta_C}(T)$

b) Usando matrices de cambio de base, determine la matriz representante de T con respecto a la base $\beta = \{1+i, 1-i\}$. Es decir, $M_{\beta\beta}(T)$. Explicite todas las matrices usadas

P2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Considere la transformación lineal

$$\begin{aligned} T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Determine los subespacios $ker(T)$ e $Im(T)$ y encuentre una base y la dimensión de cada uno.

b) Encuentre M matriz representante de T con respecto a la base canónica

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

en el espacio de partida y de llegada.

c) Encuentre M_2 matriz representante de T con respecto a la base:

$$\hat{\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

en el espacio de partida y de llegada. Puede dejarla en función de $M_{\beta\hat{\beta}}(id)$ y $M(T)$

P3 [Aplicaciones TNI]

a) Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal tal que $dimV < \infty$. Demuestre que:

$$V = Ker(T) \oplus Im(T) \iff Ker(T^2) = Ker(T)$$

b) Sea A una matriz de 2×2 y $k \geq 2$. Demuestre que:

$$A^k = 0 \iff A^2 = 0$$

c) Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una función lineal. Demuestre que para todo subespacio $K \subset W$ se tiene que:

$$dim(f^{-1}(K)) = dim(K \cap Im(f)) + dim(Ker(f))$$

Resumen

Matriz representante:

Sea $T\colon U \to V$ lineal y $\beta_U = \{u_1, ..., u_n\}$ y $\beta_V = \{v_1, ..., v_m\}$ bases de U y V, respectivamente. Entonces llamaremos matriz representante de T con respecto a las bases β_U y β_V a la matriz obtenida de los coeficientes en la descomposición de cada $T(u_i)$ en la base β_V. Concretamente,

$$\begin{array}{ccccccc} T(u_1) & = & a_{11}v_1 & + & a_{21}v_2 & + \cdots + & a_{m1}v_m \\ T(u_2) & = & a_{12}v_1 & + & a_{22}v_2 & + \cdots + & a_{m2}v_m \\ \vdots & & & & & & \\ T(u_n) & = & a_{1n}v_1 & + & a_{2n}v_2 & + \cdots + & a_{mn}v_m \end{array} \implies M_{\beta_U \beta_V}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Composición:

Sean $T\colon U \to V$, $L\colon V \to W$ lineales y $\beta_U, \beta_V, \beta_W$ bases de U, V, W respectivamente. Entonces

$$M_{\beta_U \beta_W}(L \circ T) = M_{\beta_V \beta_W}(L) M_{\beta_U \beta_V}(T).$$

En particular si tenemos dos bases $\alpha, \overline{\alpha}$ de U y $\beta, \overline{\beta}$ de V, podemos considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} U, \alpha \arrow[r, "T"] \arrow[d, "id_U"'] & V, \beta \\ U, \overline{\alpha} \arrow[r, "T"'] & V, \overline{\beta} \arrow[u, "id_V"'] \end{tikzcd}$$

Teorema del núcleo imagen (TNI):
Sean U, V espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $T : U \to V$ una transformación lineal, $dimU < \infty$. Entonces:

$$dimU = dimKerT + dimImT$$

.