MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Vicky Andaur O. & Félix Brokering P.
27 de septiembre de 2021

Pauta Auxiliar 5
Espacios vectoriales

Figura 1: El robo de la identidad no es un chiste

P1 Sea $V \subseteq \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices triangulares superiores. Se define:

$$W = \{A \in V | \text{ la suma de cada fila de } A \text{ es cero}\}$$

a) Pruebe que W es s.e.v. de V.
W es sev ssi $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, A, B \in W$, $C = \lambda_1 A + \lambda_2 B \in W$
Sabemos que:
$\sum_{i=1}^{3} A_{ij} = 0$, $\sum_{i=1}^{3} B_{ij} = 0$,
PDQ: $\sum_{i=1}^{3} C_{ij} = 0$,
Tenemos que $C_{ij} = \lambda_1 A_{ij} + \lambda_2 B_{ij}$
$\sum_{i=1}^{3} C_{ij} = \sum_{i=1}^{3}(\lambda_1 A_{ij} + \lambda_2 B_{ij}) = \lambda_1 \sum_{i=1}^{3}(A_{ij}) + \lambda_2 \sum_{i=1}^{3}(B_{ij}) = 0$ Por lo tanto W es sev

b) Pruebe que:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un generador de W.
Trivialmente $G \subseteq W$
Sea $A \in W$ arbitraria, entonces $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, pero además

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ d + e &= 0 \\ f &= 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$c = -a - b$$
$$e = -d$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ 0 & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces G es generador de W, ya que $\forall A \in W, \exists \lambda_1 = a, \lambda_2 = b, \lambda_3 = c, \lambda_4 = 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ 0 & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Extraiga de G una base para W.

Para extraer una base basta eliminar los elementos $l.d.$

Al ojo

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

PDQ que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si solo si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Y en efecto:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_1 - \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

P2 a) Estudie la dependencia lineal de los siguientes conjuntos:

i) $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \in \mathbb{R}^3$

Resolvamos la ecuación, para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que es equivalente a resolver:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$f_3 = f_3 - f_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$f_2 = f_2 - f_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$f_3 = f_3 - \frac{3}{2} f_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como λ_3 es variable libre, entonces el sistema tiene infinitas soluciones y al menos una de esas es para $\lambda_3 \neq 0$, por lo tanto el U es *l.d.*

ii) $V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$

Resolvamos la ecuación, para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lo que implica que $\lambda_i = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, 4\}$, por lo que V es *l.i.*

iii) $W = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ **en el espacio** $\mathcal{F} = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **es función**$\}$.
Resolvamos la ecuación, para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 e^x + \lambda_2 x e^x + \lambda_3 x^2 e^x = 0$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2) e^x = 0$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ podemos dividir por e^x.

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 = 0$$

Podemos derivar respecto a x:

$$\lambda_2 + 2\lambda_3 x = 0$$

$$2\lambda_3 = 0$$

Entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Por lo que W es *l.i.*

b) Sean E, F **espacios vectoriales sobre un cuerpo** $\mathbb{K}$**. Sea** $T : E \to F$ **una función que satisface**

(1) $T(0_E) = 0_F$

(2) $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, T(\alpha x) = \alpha T(x)$

(3) $\forall x, y \in E : \ T(x + y) = T(x) + T(y)$

Considere el conjunto $T(E) = \{y \in F : y = T(x), x \in E\}$**.**

i) (Propuesto) Demuestre que $T(E)$ **es s.e.v. de** F**.**

ii) Suponga además que T satisface que $\forall x \in E, T(x) = 0 \implies x = 0$. Muestre que si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq E$ es $l.i.$, entonces $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\} \subseteq F$ es $l.i.$

Que un conjunto sea $l.i.$, implica que para $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$
PDQ: Para $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i) = 0, \implies \alpha_i = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i) = 0$$

Por propiedad (2) $\alpha_i T(u_i) = T(\alpha_i u_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i) = \sum_{i=1}^{n} T(\alpha_i u_i) = 0$$

Por propiedad (3) e inducción sobre n **:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = 0$$

Por hipótesis:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$$

Y como u_i es $l.i.$, entonces $\alpha_i = 0 \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ QED
INDUCCIÓN **:
Caso base: $n = 2 : \sum_{i=1}^{2} T(a_i) = T(a_1) + T(a_2) = T(a_1 + a_2) = T(\sum_{i=1}^{2} a_i)$
Suponemos que es cierto para $n = k : \sum_{i=1}^{k} T(a_i) = T(\sum_{i=1}^{k} a_i)$
Demostremos para $n = k + 1$:
Por HI tenemos: $\sum_{i=1}^{k+1} T(a_i) = T(\sum_{i=1}^{k} a_i) + T(a_{k+1})$
Y finalmente por propiedad (3) $T(\sum_{i=1}^{k} a_i) + T(a_{k+1}) = T(\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}) = T(\sum_{i=1}^{k+1} a_i)$

P3 Para $n \in \mathbb{N}$ se define $P_n(\mathbb{R})$ como el e.v de los polinomios con grado menor o igual a n a coeficientes reales. Sea: $V = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : \exists q(x) \in P_1(\mathbb{R}), p(x) = q(x)(x^2 + 5)\}$

a) Encuentre una base de V
Los elementos de V tienen la forma: $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q(x)$ tiene la forma: $q(x) = b_1x + b_0$ pero además $p(x) = (b_1x + b_0)(x^2 + 5)$, para $a_3, a_2, a_1, a_0, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$
$p(x) = (b_1x^3 + b_0x^2 + 5b_1x + 5b_0) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
Por lo que:
$a_3 = b_1$
$a_2 = b_0$
$a_1 = 5b_1 = 5a_3$
$a_0 = 5b_0 = 5a_2$
Entonces, reordenando $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + 5a_3x + 5a_2 = a_3(x^3 + 5x) + a_2(x^2 + 5)$
Entonces proponemos que $B = \{(x^3 + 5x), (x^2 + 5)\}$ es una base de V
Tenemos que $V = \langle B \rangle$
Ahora revisemos que B es $l.i$

$$\lambda_1(x^3 + 5x) + \lambda_2(x^2 + 5) = 0$$

Podemos derivar respecto a x:

$$\lambda_1(3x^2 + 5) + \lambda_2(2x) = 0$$

$$\lambda_1(6x) + \lambda_2(2) = 0$$
$$6\lambda_1 = 0$$

La $6\lambda_1 = 0$ ssi $\lambda_1 = 0$, y si $\lambda_1 = 0$, entonces ($\lambda_2(2) = 0$ ssi $\lambda_2 = 0$)
Por lo tanto B es $l.i.$, entonces B es base de V

b) Calcule $dim(V)$
$dim(V) = \#B = 2$

Resumen

Espacio vectorial Dado un grupo abeliano $(V,+)$ y un cuerpo $(\mathbb{K},+,\cdot)$, con una ley de composición externa. Diremos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ssi la ley de composición externa satisface $\forall \lambda,\beta \in \mathbb{K}, x,y \in V$:

(EV1) $(\lambda+\beta)x = \lambda x + \beta x$

(EV2) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

(EV3) $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$

(EV4) $1 \cdot x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{K}$.

En tal caso, los elementos de V se denominan vectores y los de $\mathbb{K}$, escalares.

Subespacio vectorial: Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \emptyset$, es un subespacio vectorial (s.e.v) de V ssi:

- $\forall u,v \in U,\ u+v \in U$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U, \lambda u \in U$

Es decir, ambas operaciones, la interna y la externa, son cerradas en U.

Combinación lineal Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y una colección de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, y de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Denominamos combinación lineal a la suma ponderada de estos vectores:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

Dependencia e independencia lineal Sea $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$, diremos que estos vectores son **linealmente dependientes** $(l.d.)$ si y solo si: existen escalares $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, no todos nulos, tales que $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. En caso contrario, es decir $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0\ \forall i = 1, \ldots, n$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es **linealmente independiente** $(l.i.)$.

Generadores de un e.v. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que los vectores $v_1, \ldots, v_n \subseteq V$, generan V si y sólo sí:

$$\langle \{v_1, ..., v_n\} \rangle = V$$

o de manera equivalente:

$$\forall v \in V, \exists \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{K}, \text{ tal que } v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Base Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, diremos que el conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base de V si y sólo sí:

(1) $\{v_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto $l.i.$

(2) $V = \langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$

Teorema. Si $X = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es un conjunto generador, entonces es posible extraer un subconjunto $B = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\}$ que es base de V .

Teorema Supongamos que tenemos $B = \{v_i\}_{i=1}^n$, base de V y un conjunto arbitrario $X = \{w_i\}_{i=1}^m \subseteq V$. Si $m > n$, entonces el conjunto X es $l.d.$

Dimensión Sea V espacio vectorial, sea B base de V, $dim(V) = \#B = n$, con n finita (si n es infinita, entonces la dimensión de V es infinita)