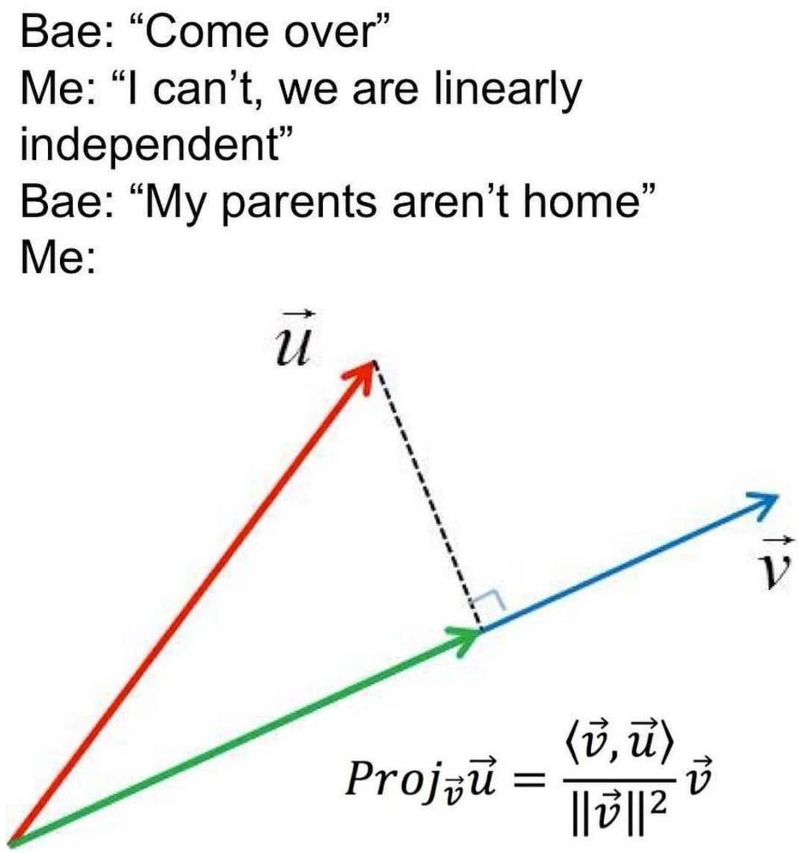
MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Victoria Andaur O. & Félix Brokering P.
21 de septiembre de 2021

Auxiliar 4

Auxiliar para el control 1



P1 Sistema de ecuaciones:

Considere el siguiente sistema lineal a coeficientes reales:

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +x_2 & +(1-2\alpha)x_3 & +(\beta+1)x_4 & = & \beta-3 \\ & x_2 & -x_3 & +(\beta-\alpha)x_4 & = & -1 \\ & -2x_2 & +2x_3 & +(2-2\beta)x_4 & = & -2 \\ 2x_1 & & +2x_3 & +\alpha x_4 & = & 4\beta-3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +(\alpha+\beta-1)x_4 & = & 0 \end{array}$$

Determine condiciones sobre α y β para que el sistema:

(i) Tenga infinitas soluciones

(ii) Tenga solución única

(iii) No tenga solución

P2 Espacios vectoriales:
Sea $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Considere los siguientes sub conjuntos de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ $W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) | A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\}$, $W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) | \; Tr(A) = 0\}$, con $Tr(A)$ la función traza de una matriz definida como $Tr(A) : M_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} aii$$

a) Demuestre que W_1 es un sev de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

b) Demuestre que W_2 es un sev de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

P3 Más espacios vectoriales

a) Sea $P_{n \leq 3}[X] := \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 | \; a_i \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de polinomios menores o iguales a 3. Demuestre que $P_{n \leq 3}[X]$ es un espacio vectorial sobre R.

b) Se considera el sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & 0 \end{array}$$

Demostrar que el conjunto W de soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

c) Sea $U_b := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | z = 5t + b, \text{ con } b \in \mathbb{R}, \text{ fijo}\}$. ¿Qué condición debe cumplir este conjunto para ser un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$?.

P4 Matrices

a) **LDU:**
Encuentre la descomposición LDU de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Sea $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $M^tM \in M_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible. Se define la matriz $P \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$ como

$$P = I - M(M^tM)^{-1}M^t$$

donde I es la identidad de dimensión m. Pruebe que

b.1) $P^2 = P$ y $PM = 0$, donde 0 es la matriz nula de dimensión m.

b.2) Las matrices M^tM y P son simétricas.

b.3) P no es invertible (Ind: Argumente que M no es nula).

Resumen

Teorema: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son equivalentes.

- A es invertible
- $\exists!\ x$ solución al sistema homogéneo: $Ax = 0$
- $\forall i,\ \tilde{A}_{ii} \neq 0$ ($\tilde{A}$ es la matriz A escalonada)
- $\forall b, \exists!\ x$ solución al sistema $Ax = b$
- $\forall b, \exists\ x$ solución al sistema $Ax = b$

Corolario: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\exists B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $BA = I$ $\implies A$ es invertible y $B = A^{-1}$

Matriz traspuesta: Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$, se define la traspuesta de A como aquella matriz de $n \times m$ que denotaremos por A^t tal que $(At)_{ij} = a_{ji}$. Esto corresponde a intercambiar el rol de las filas y columnas. Más claramente, la primera fila de A^t es la primera columna de A y así sucesivamente.

Matriz simétrica: Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}, A$ es simétrica ssi $A^T = A$
Es fácil verificar que A es simétrica ssi:

$$a_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1, \ldots, n$$

Matriz anti-simétrica: Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}, A$ es anti-simétrica ssi $A^T = -A$

Matrices elementales: Definimos la matriz elemental $E_{p,q}(\lambda)$ mediante

$$(E_{p,q}(\lambda))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ \lambda, & \text{si } i = q, j = p \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La multiplicación $E_{p,q}(\lambda)A$ modifica la fila q de A y corresponde a multiplicar la fila p de A por λ y sumarlo a la fila q.
- **Inversa:** $E_{p,q}(\lambda)$ es invertible y $(E_{p,q}(\lambda))^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$.

Matriz de permutación: Definimos la matriz de permutación $I_{p,q}$ mediante:

$$(I_{p,q})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \wedge (i \neq p \vee q) \\ 1, & \text{si } (i = p \wedge j = q) \vee (i = q \vee j = p) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La multiplicación $I_{p,q}A$ permuta las filas p y q de A

ESPACIOS VECTORIALES:

Espacio vectorial Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, con una ley de composición externa. Diremos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ssi la ley de composición externa satisface $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in V$:

(EV1) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

(EV2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

(EV3) $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$

(EV4) $1 \cdot x = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{K}$.

En tal caso, los elementos de V se denominan vectores y los de $\mathbb{K}$, escalares.

Subespacio vectorial: Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \neq \emptyset$, es un subespacio vectorial (s.e.v) de V ssi:

- $\forall u, v \in U . u + v \in U$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U, \lambda u \in U$

Es decir, ambas operaciones, la interna y la externa, son cerradas en U.

Combinación lineal Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y una colección de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, y de escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Denominamos combinación lineal a la suma ponderada de estos vectores:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$