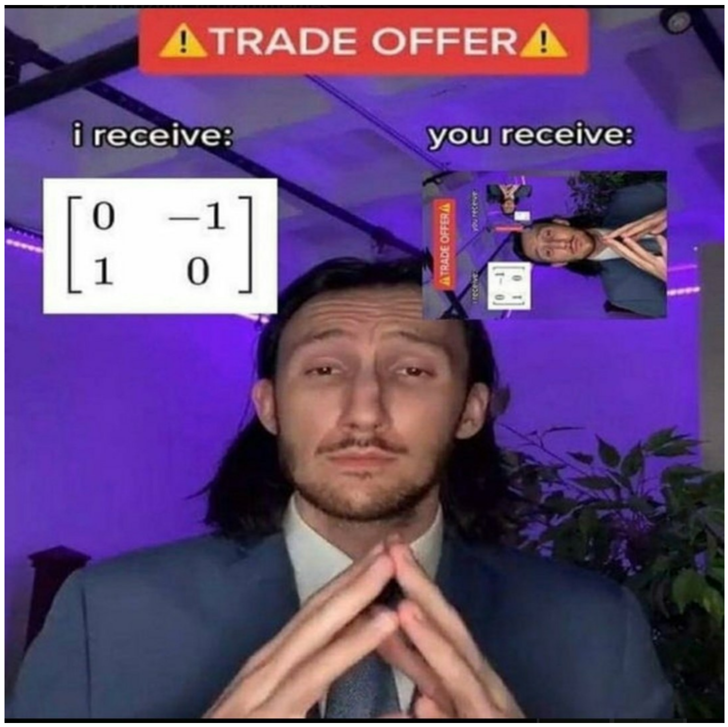
MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Victoria Andaur O. & Félix Brokering P.
9 de septiembre de 2021

Pauta Auxiliar 3: Matrices Vol. 3

Matrices invertibles



P1 Considere el siguiente sistema lineal:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
-x_1 & + & & & 3x_3 & + & 2x_4 & & & = \alpha \\
 & & -x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & = \beta \\
5x_1 & + & & & -15x_3 & + & -10x_4 & & & = 5 \\
-2x_1 & + & & & 6x_3 & + & 4x_4 & & & = -2 \\
 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & - & 15x_5 & = 9
\end{array}$$

a) Determine los valores o condiciones sobre α, β para que el sistema tenga solución.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
-1 & 0 & 3 & 2 & 0 & \alpha \\
0 & -1 & -1 & 1 & 5 & \beta \\
5 & 0 & -15 & -10 & 0 & 5 \\
-2 & 0 & 6 & 4 & 0 & -2 \\
0 & 3 & 3 & -3 & -15 & 9
\end{array}\right)$$

$f_3' = f_3 + 5f_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
-1 & 0 & 3 & 2 & 0 & \alpha \\
0 & -1 & -1 & 1 & 5 & \beta \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5+5\alpha \\
-2 & 0 & 6 & 4 & 0 & -2 \\
0 & 3 & 3 & -3 & -15 & 9
\end{array}\right)$$

$f_4' = f_4 - 2f_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 5 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5+5\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2-2\alpha \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -15 & 9 \end{array}\right)$$

$f_5' = f_5 + 3f_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 5 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5+5\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9+3\beta \end{array}\right)$$

Entonces para que el sistema tenga solución (infinitas) $\alpha = -1$ y $\beta = -3$

b) Dado que el sistema tiene solución, determine los vectores $\vec{v_3}, \vec{v_4}$, $\vec{v_5}$ y $\vec{v_k} \in \mathcal{M}_{5,1}$ tal que:

$$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5)^T = \vec{v_3}x_3 + \vec{v_4}x_4 + \vec{v_5}x_5 + \vec{v_k}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

P2 Considere la matriz $B \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ a la cual se le realizan las siguientes operaciones: A la fila 1, se le suma la fila 2, luego se permutan las filas 1 y 3, y finalmente a la fila 3, se le suma 2 veces la fila 2. Como resultados de estas operaciones se obtiene la matriz C. Calcule B^{-1} sabiendo que

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- "A la fila 1, se le suma la fila 2": $E_{2,1}(1)$
- "Se permutan las filas 1 y 3": $I_{1,3}$
- "A la fila 3, se le suma 2 veces la fila 2": $E_{2,3}(2)$

$$\begin{aligned} E_{2,3}(2)I_{1,3}E_{2,1}(1)B &= C \quad / * B^{-1} \\ E_{2,3}(2)I_{1,3}E_{2,1}(1)\cancel{BB^{-1}} &= CB^{-1} \quad /C^{-1}* \\ C^{-1}E_{2,3}(2)I_{1,3}E_{2,1}(1) &= \cancel{C^{-1}C}B^{-1} \\ C^{-1}E_{2,3}(2)I_{1,3}E_{2,1}(1) &= B^{-1} \end{aligned}$$

$$E_{2,1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{2,3}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$I_{1,3}E_{2,1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,3}(2)(I_{1,3}E_{2,1}(1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1}(E_{2,3}(2)I_{1,3}E_{2,1}(1)) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

P3 **a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Pruebe que AB es invertible $\iff$ A y B son invertibles**

$\Rightarrow$ Como AB es invertible, $\exists (AB)^{-1}$ tal que $AB(AB)^{-1} = I$ y como las matrices son asociativas, se tiene que $A(B(AB)^{-1}) = I$, entonces $B(AB)^{-1}$ es la inversa de A.
De la misma forma, se tiene que $(AB)^{-1}AB = I$, por lo que $(AB)^{-1}A$ es la inversa de B

$\Leftarrow$ Como A y B son invertibles, existen A^{-1}, B^{-1}, tal que $AA^{-1} = I$ y $BB^{-1} = I$
$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$, entonces la inversa de AB existe y es $B^{-1}A^{-1}$

b) Sea $C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ antisimétrica, esto es $C^T = -C$. Demuestre que $c_{ii} = 0\ \forall i$.

- $c_{ii}^T = c_{ii} \forall i$ por definición de traspuesta
- $c_{ii}^T = -c_{ii} \forall i$ por hipótesis

Entonces $c_{ii} = -c_{ii} \implies 2c_{ii} = 0 \Leftrightarrow c_{ii} = 0$ QED

c) Sea $D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que D es invertible y $D^5 - D = 0$. Calcule D^{-1}

Por hipotesis tenemos: $D^5 = D$, como D es invertible, podemos multiplicar por $/D$, lo que nos da $D^4 = I$ y como la multiplicación de matrices es asociativa: $D^3 * D = I$, entonces por corolario la inversa de D existe y es D^3

P4 a) **Sea $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se define el determinante de A por $|A| = ad - bc$. Demuestre que si $|A| \neq 0$ entonces A es invertible, y además**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Como tenemos que si A es invertible la inversa es única. Multiplicamos A por $\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ para ver si nos da la identidad. Y efectivamente.

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

b) **Sea $B \in \mathcal{M}_{3,3}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pruebe que B es invertible si y solo si a $b^2 \neq 1$ y calcule su inversa.** Para demostrar que B es invertible ssi $b^2 \neq 1$ vamos a escalonar la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3' = F_3 - bF_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - b^2 \end{pmatrix}$$

De esta forma, para que no existan 0 en la diagonal $b \neq 1$, por lo que la matriz B es invertible ssi $b \neq 1$.

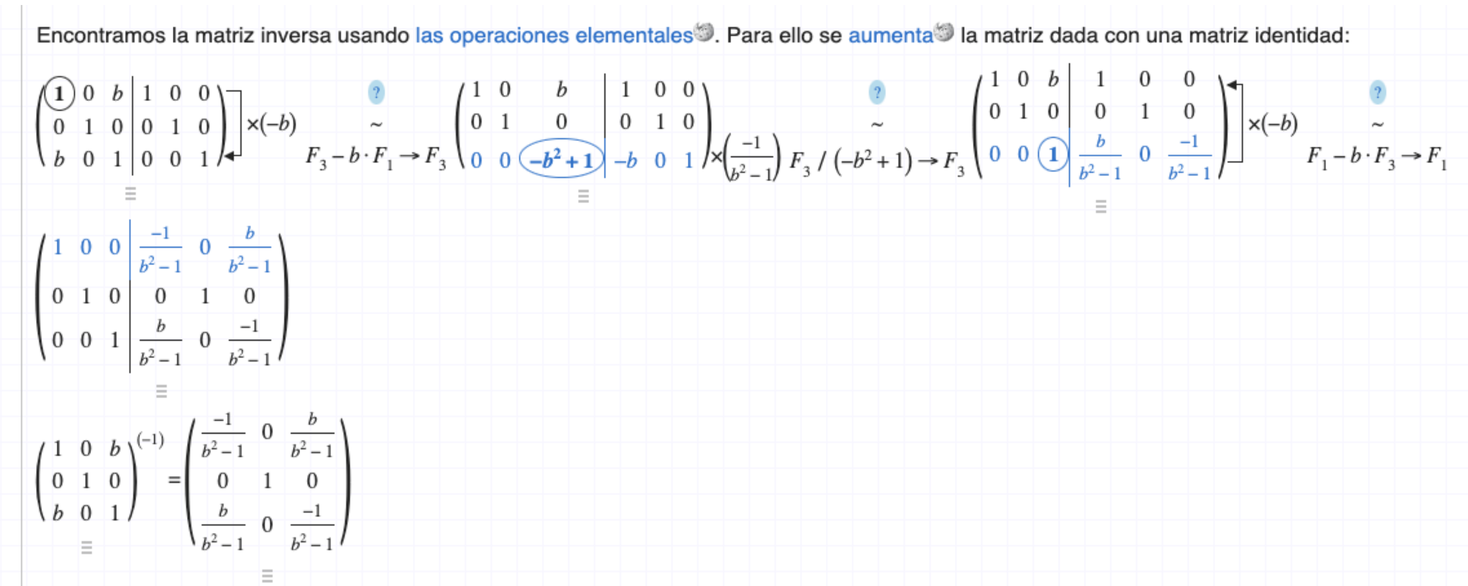


Figura 1: Resolución escalonar matriz, método de Gauss-Jordan, fuente: https://matrixcalc.org/es

c) **[Propuesto] Sea la matriz a coeficientes reales** $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$**. Demuestre que si la matriz es invertible entonces** $(a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$

Se resuelve usando el método de Gauss Jordan, para una mayor claridad pueden usar la página matrixcalc.org/es/ ingresan la matriz y hacen clic en matriz inversa y luego en método de Jordan.

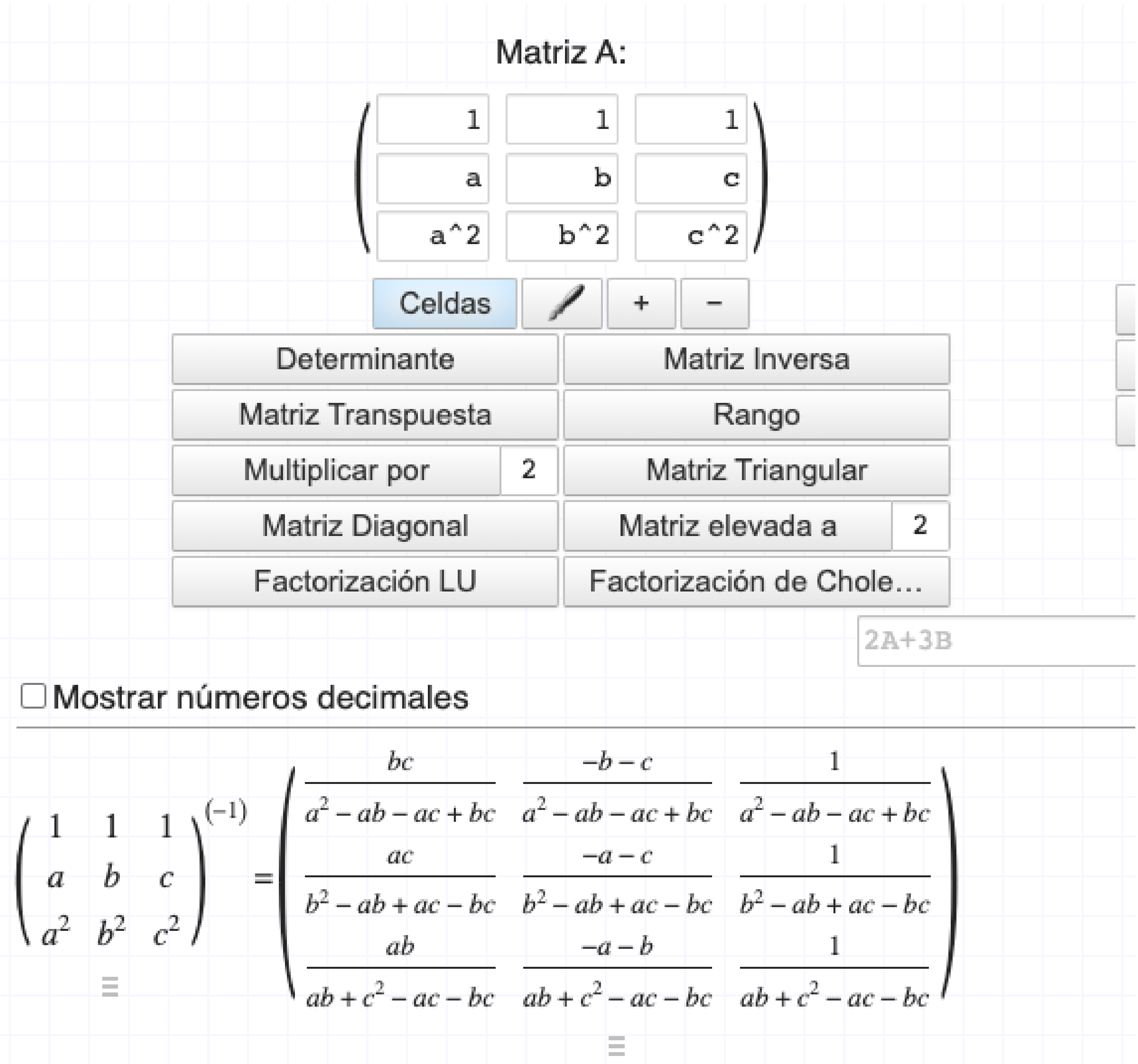


Figura 2: Matriz inversa pregunta 4, fuente: https://matrixcalc.org/es

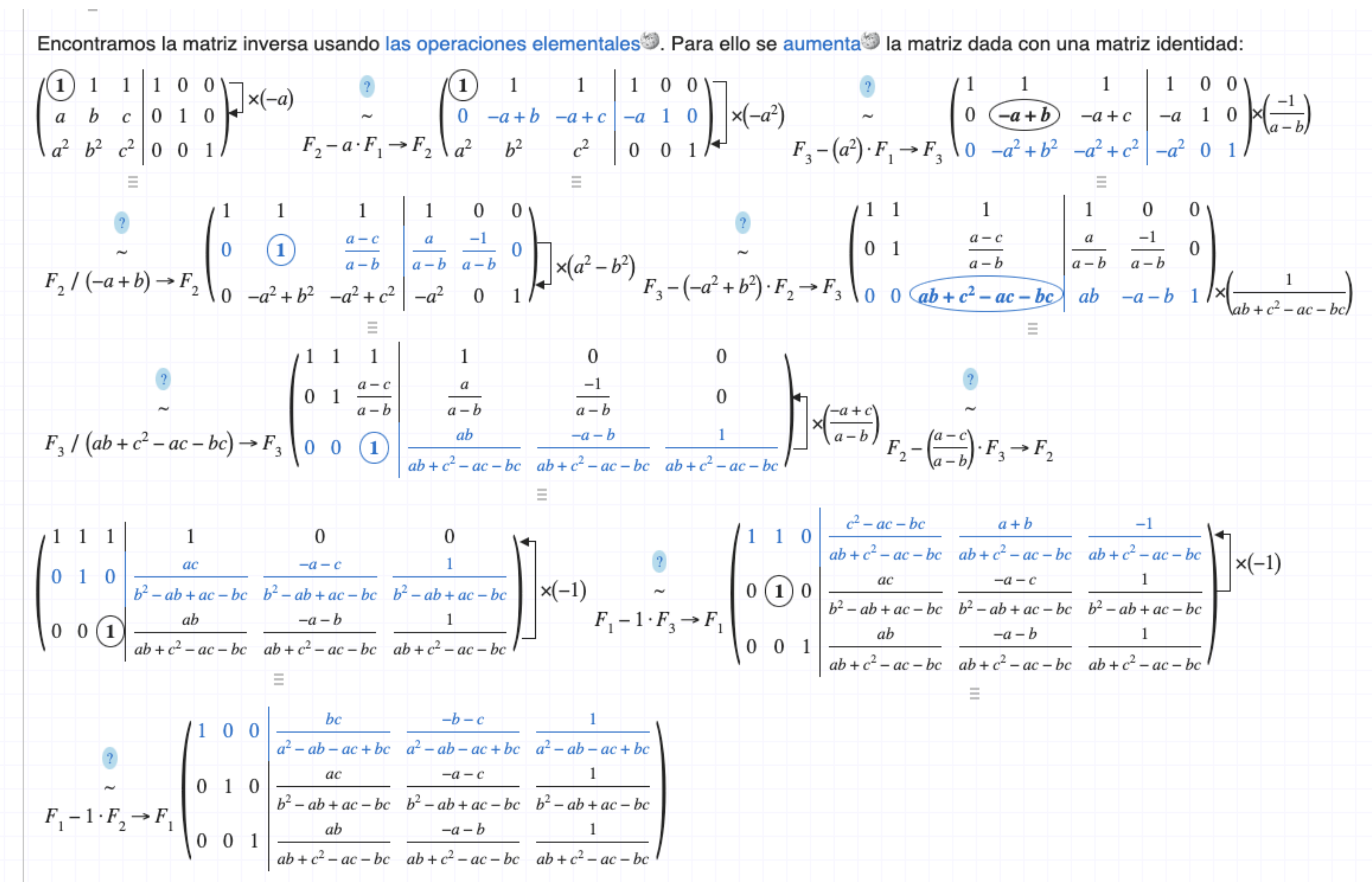


Figura 3: Resolución por método de Jordan, fuente https://matrixcalc.org/es

P5 [**Propuesto**]

a) Si $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, demuestre que $B + B^T$ es simétrica y que $B - B^T$ es anti-simétrica.

b) Muestre que toda matriz cuadrada se puede descomponer como la suma de una matriz simétrica K más una antisimétrica H.

c) Sean $A, B, (A + B^{-1})$ matrices invertibles, demuestre que $(A^{-1} + B)$ es invertible y que su inversa es $A(A + B^{-1})B^{-1}$

Resumen

Teorema: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son equivalentes.

- A es invertible
- $\exists!\ x$ solución al sistema homogéneo: $Ax = 0$
- $\forall i,\ \tilde{A}_{ii} \neq 0$ ($\tilde{A}$ es la matriz A escalonada)
- $\forall b, \exists!\ x$ solución al sistema $Ax = b$
- $\forall b, \exists\ x$ solución al sistema $Ax = b$

Corolario: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\exists B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $BA = I$ $\implies$ A es invertible y $B = A^{-1}$
Matriz simétrica: Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}, A$ es simétrica ssi $A^T = A$
Matriz anti-simétrica: Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}, A$ es anti-simétrica ssi $A^T = -A$

Matrices elementales: Definimos la matriz elemental $E_{p,q}(\lambda)$ mediante

$$(E_{p,q}(\lambda))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ \lambda, & \text{si } i = q, j = p \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La multiplicación $E_{p,q}(\lambda)A$ modifica la fila q de A y corresponde a multiplicar la fila p de A por λ y sumarlo a la fila q.
- **Inversa:** $E_{p,q}(\lambda)$ es invertible y $(E_{p,q}(\lambda))^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$.

Matriz de permutación: Definimos la matriz de permutación $I_{p,q}$ mediante:

$$(I_{p,q})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \wedge (i \neq p \vee q) \\ 1, & \text{si } (i = p \wedge j = q) \vee (i = q \vee j = p) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La multiplicación $I_{p,q}A$ permuta las filas p y q de A