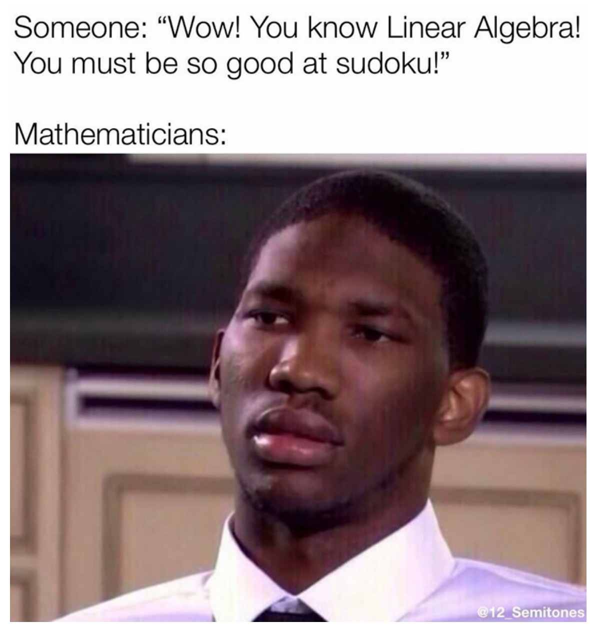
MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Victoria Andaur O. & Félix Brokering P.
7 de septiembre de 2021

Auxiliar 3: Matrices Vol. 3
Matrices invertibles



P1 Considere el siguiente sistema lineal:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrl}
-x_1 & + & & & 3x_3 & + & 2x_4 & & & =\alpha \\
 & & -x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & =\beta \\
5x_1 & + & & & -15x_3 & + & -10x_4 & & & =5 \\
-2x_1 & + & & & 6x_3 & + & 4x_4 & & & =2 \\
 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & - & 15x_5 & =9
\end{array}
$$

a) Determine los valores o condiciones sobre α, β para que el sistema tenga solución.

b) Dado que el sistema tiene solución, determine los vectores $\vec{v_3}, \vec{v_4}$, $\vec{v_5}$ y $\vec{v_k} \in \mathcal{M}_{5,1}$ tal que:

$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)^T = \vec{v_3}x_3 + \vec{v_4}x_4 + \vec{v_5}x_5 + \vec{v_k}$$

P2 Considere la matriz $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ a la cual se le realizan las siguientes operaciones: A la fila 1, se le suma la fila 2, luego se permutan las filas 1 y 3, y finalmente a la fila 3, se le suma 2 veces la fila 2. Como resultados de estas operaciones se obtiene la matriz C. Calcule B^{-1} sabiendo que

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P3 a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Pruebe que AB es invertible $\iff$ A y B son invertibles.

b) Sea $C \in \mathcal{M}_{n\times n}$ antisimétrica, esto es $C^T = -C$. Demuestre que $c_{ii} = 0\ \forall i$.

c) Sea $D \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que D es invertible y $D^5 - D = 0$. Calcule D^{-1}

P4 a) Sea $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Se define el determinante de A por $|A| = ad - bc$. Demuestre que si $|A| \neq 0$ entonces A es invertible, y además

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

b) Sea $B \in \mathcal{M}_{3,3}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pruebe que B es invertible si y solo si a $b^2 \neq 1$ y calcule su inversa.

c) **[Propuesto]** Sea la matriz a coeficientes reales $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. Demuestre que si la matriz es invertible entonces

$(a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$

P5 **[Propuesto]**

a) Si $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, demuestre que $B + B^T$ es simétrica y que $B - B^T$ es anti-simétrica.

b) Muestre que toda matriz cuadrada se puede descomponer como la suma de una matriz simétrica K más una antisimétrica H.

c) Sean $A, B, (A + B^{-1})$ matrices invertibles, demuestre que $(A^{-1} + B)$ es invertible y que su inversa es $A(A+B^{-1})B^{-1}$

Resumen

Teorema: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ son equivalentes.

- A es invertible
- $\exists!\ x$ solución al sistema homogéneo: $Ax = 0$
- $\forall i,\ \tilde{A}_{ii} \neq 0$ ($\tilde{A}$ es la matriz A escalonada)
- $\forall b, \exists!\ x$ solución al sistema $Ax = b$
- $\forall b, \exists\ x$ solución al sistema $Ax = b$

Corolario: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\exists B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $BA = I$ $\implies$ A es invertible y $B = A^{-1}$

Matriz simétrica: Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}, A$ es simétrica ssi $A^T = A$

Matriz anti-simétrica: Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}, A$ es anti-simétrica ssi $A^T = -A$

Matrices elementales: Definimos la matriz elemental $E_{p,q}(\lambda)$ mediante

$$(E_{p,q}(\lambda))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ \lambda, & \text{si } i = q, j = p \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La multiplicación $E_{p,q}(\lambda)A$ modifica la fila q de A y corresponde a multiplicar la fila p de A por λ y sumarlo a la fila q.
- **Inversa:** $E_{p,q}(\lambda)$ es invertible y $(E_{p,q}(\lambda))^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$.

Matriz de permutación: Definimos la matriz de permutación $I_{p,q}$ mediante:

$$(I_{p,q})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \wedge (i \neq p \vee q) \\ 1, & \text{si } (i = p \wedge j = q) \vee (i = q \vee j = p) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- La multiplicación $I_{p,q}A$ permuta las filas p y q de A