MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Victoria Andaur O. & Félix Brokering P.
24 de agosto de 2021

Pauta Auxiliar 1: Matrices

P1. (a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}$ simétricas, demuestre que: AB es simétrica $\Leftrightarrow AB = BA$.

Solución :

$\Rightarrow$ Como AB es simétrica se tiene que $AB = (AB)^t$
$(AB)^t = B^t A^t$
Además $A^t = A$ y $B^t = B$
Por lo que $AB = BA$
$\Leftarrow$ Aplicamos la traspuesta a $AB = BA$:
$(AB)^t = (BA)^t$
$(BA)^t = A^t B^t$ (traspuesta de BA)
$A^t B^t = AB$ (Simetría de A y B)
Por lo que $(AB)^t = AB$, lo que significa que la matriz es simétrica

(b) Sea A matriz cuadrada de $n \times n$. Pruebe que A es invertible si y solo si A^k es invertible para algún $k \geq 1$.

Solución :

$\Rightarrow$Inducción:
Caso base: Para $k = 1$, $AA^{-1} = I$
Hipótesis de inducción: Suponemos que es cierto para algún $k = m$: $A^m A^{-m} = I$
Probamos para $k = m + 1$: $(A^{m+1})(A^{-(m+1)}) = (A^m A)(A^{-1} A^{-m}) = A^m I A^{-m} = I$
$\Leftarrow$ Si A^k es invertible, entonces $\exists B \in \mathcal{M}_{nn}$, tal que $A^k B = BA^k = I$, con $B = (A^k)^{-1}$
$A^k = AA^{k-1} = A^{k-1} A$, entonces $AA^{k-1} B = BA^{k-1} A$

(c) Sea $N \in \mathcal{M}_{nn}$. Diremos que N es nilpotente si $\exists k \in N$ tal que $N^k = 0$. ¿Puede N ser invertible?

Solución :

Veremos que no es así. Por contradicción, supongamos que lo fuera, es decir, que N es invertible. Como además es nilpotente, consideremos $k \in \mathbb{N}$ tal que $N^k = 0$. Notemos inmediatamente que $k \geq 0$, pues

$$N^0 = I \neq 0,$$

luego, podemos factorizar N y obtener

$$NN^{k-1} = N^k = 0.$$

Multiplicando por la izquierda por N^{-1} (que existe, pues N es invertible), obtenemos que

$$\underbrace{N^{-1}N}_{I}N^{k-1} = N^{-1}0 = 0.$$

Es decir,

$$N^{k-1} = 0.$$

Repitiendo esto inductivamente, lo que podemos hacer siempre que el exponente sea ≥ 1, llegamos a que

$$N^0 = 0,$$

lo que es una contradicción, pues $N^0 = I$.

(d) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ verifica $A^3 + A^2 + A + I = 0$ entonces es invertible.

Solución :

Manejemos la ecuación que nos entregan. Pasemos primero todas las potencias de A hacia la derecha:

$$I = -A^3 - A^2 - A.$$

Factoricemos ahora por A por la izquierda (por la derecha también funciona):

$$I = A(-A^2 - A - I).$$

Con esto, como para matrices solo basta con encontrar inversa por un lado, podemos concluir que, A posee inversa $(-A^2 - A - I)$ y luego es invertible.

P2. Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ la matriz siguiente:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ o bien } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{si } j \neq i+1 \end{cases}$$

(a) Demuestre que la matriz $D = B^2$ satisface:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+2 \\ 0 & \text{si } j \neq i+2 \end{cases}$$

Solución :

$$
\begin{aligned}
(B^2)_{i,j} = (B * B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} B_{i,k}B_{k,j} \text{ \#\textit{Definición de multiplicación de matrices}} \\
&= \sum_{k=1}^{i} B_{i,k}B_{k,j} + B_{i,i+1}B_{i+1,j} + \sum_{k=i+2}^{n} B_{i,k}B_{k,j} \text{ \#\textit{Separamos la sumatoria en 3 partes}} \\
&= \cancelto{0}{\sum_{k=1}^{i} B_{i,k}B_{k,j}} + 1 * B_{i+1,j} + \cancelto{0}{\sum_{k=i+2}^{n} B_{i,k}B_{k,j}} \text{\# \textit{Usamos que si} } j \neq i+1 \text{ \textit{entonces} } B_{i,j} = 0 \\
&= B_{i+1,j}
\end{aligned}
$$

Y por definición de $b_{i,j}$ tenemos los siguientes casos para $B_{i+1,j}$

$$
B_{i+1,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = (i+1)+1 \\ 0 & \text{si } j \neq (i+1)+1 \end{cases}
$$

(b) Usando el resultado anterior demuestre por inducción en m que B^m es la matriz

$$
b_{ij}^m = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+m \\ 0 & \text{si } j \neq i+m \end{cases}
$$

Solución :

Caso Base: m=2, probado en (a)

Hipótesis de inducción: $b_{i,j}^m = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+m \\ 0 & \text{si } j \neq i+m \end{cases}$

Probemos entonces para $m+1$:

$$
\begin{aligned}
B_{ij}^{m+1} = (B^m * B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} B_{i,k}^m B_{k,j} \\
&= \sum_{k=0}^{i+m-1} B_{i,k}^m B_{k,j} + B_{i,i+m}^m B_{i+m,j} + \sum_{k=i+m+1}^{n} B_{i,k}^m B_{k,j} \text{ \#\textit{Separamos de nuevo en 3 partes}} \\
&= \cancelto{0}{\sum_{k=1}^{i+m-1} B_{i,k}^m B_{k,j}} + 1 * B_{i+m,j} + \cancelto{0}{\sum_{k=i+m+1}^{n} B_{i,k}^m B_{k,j}} \text{\# \textit{Usamos que si} } j \neq i+m \text{ \textit{entonces} } B_{i,j}^m = 0 \\
&= B_{i+m,j}
\end{aligned}
$$

(c) Escriba la matriz B^n

Solución :

Tenemos que:

$$
b_{ij}^n = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+n \\ 0 & \text{si } j \neq i+n \end{cases}
$$

Como la primera condición es imposible, entonces B^n es la matriz de ceros.

P3. Recordemos que una matriz A se dice triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}$ matrices triangulares inferiores, demuestre que:

(a) AB es triangular inferior

Solución :

Debemos probar que $(AB)_{ij} = 0$ para $i < j$. Para esto, consideremos $i < j$ y calculemos explícitamente la posición i, j del producto.

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Notemos ahora que para todos los índices $k > i$, como A es triangular inferior, tendremos que $a_{ik} = 0$. Así, si separamos la suma en los términos mayores que i y los menores que i, obtenemos:

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj} + \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{0} b_{kj}}_{0} \\ &= \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj}. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $i < j$, tenemos que para todo k entre 1 e i, $k < j$. Luego, como B también es triangular inferior, para todos tales k se tiene que $b_{kj} = 0$. Así, la suma anterior se anula:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} \underbrace{b_{kj}}_{0} = 0.$$

De esta manera, como para todo $i < j$ tenemos que $(AB)_{ij} = 0$, podemos concluir que AB es triangular inferior.

(b) $(AB)_{ii} = (BA)_{ii}, \ \forall i \in 1, \ldots, n$

Solución :

Nuevamente, consideremos $i \in 1, \ldots n$ y calculemos explícitamente $(AB)_{ii}$ y $(BA)_{ii}$. Se tiene que

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}.$$

Bajo la misma lógica anterior, notemos que para $k \in 1, \ldots i-1$, tenemos que $k < i$, con lo que $b_{ki} = 0$, al ser triangular inferior. Análogamente, para $k \in i+1, \ldots n$, tenemos que $k > i$, con lo que $a_{ik} = 0$, también por ser triangular inferior. Así, podemos separar la suma en tres partes y obtener que:

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{ki} + a_{ii} b_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} \underbrace{b_{ki}}_{0}}_{0} + a_{ii} b_{ii} \underbrace{\sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{a_{ik}}_{0} b_{ki}}_{0} \\ &= a_{ii} b_{ii}. \end{aligned}$$

De manera totalmente idéntica (solo cambiando los roles de A y B) obtenemos que

$$(BA)_{ii} = b_{ii}a_{ii}.$$

Usando finalmente que tanto a_{ii} como b_{ii} son números reales, y luego conmutan, llegamos a que

$$(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii} = b_{ii}a_{ii} = (BA)_{ii}$$

tal y como queríamos demostrar.

(c) **Propuesto**: De existir, A^{-1} es triangular inferior y $(A^{-1})_{ii} = (A)_{ii}^{-1}$

P4. P1 Primavera 2017 Considere el sistema de 3×3:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & (\alpha-1)z & = & 0 \\ 2x & + & (1-\alpha)y & + & z & = & \beta \\ (\alpha+1)x & - & 4y & + & z & = & \gamma \end{array}$$

Encuentre condiciones sobre α, β, γ de modo que el sistema:

(a) Tenga solución única

(b) Tenga infinitas soluciones

(c) Considere:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha-1 \\ 2 & 1-\alpha & 1 \\ \alpha+1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

y pruebe que para $\alpha = 7$ la matriz es invertible

Solución :

Es importante notar que un sistema de ecuaciones es lo mismo que la ecuación matricial $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha-1 \\ 2 & 1-\alpha & 1 \\ \alpha+1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{1}$$

La idea entonces es encontrar una inversa de la matriz A y cuales con las características para que esta inversa exista, para ello escribimos el siguiente sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (\alpha-1) & 0 \\ 2 & (1-\alpha) & 1 & \beta \\ (\alpha+1) & -4 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Lo escalonamos: $F_2 - 2 * F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (\alpha-1) & 0 \\ 0 & (-\alpha-3) & (3-2\alpha) & \beta \\ (\alpha+1) & -4 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

$F_3 - (\alpha+1)F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (\alpha-1) & 0 \\ 0 & (-\alpha-3) & (3-2\alpha) & \beta \\ 0 & (-2\alpha-6) & (2-\alpha^2) & \gamma \end{array}\right)$$

$F_3 - 2 * F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (\alpha-1) & 0 \\ 0 & (-\alpha-3) & (3-2\alpha) & \beta \\ 0 & 0 & (-\alpha^2+4\alpha-4) & \gamma-2\beta \end{array}\right)$$

Lo que queda finalmente como:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & (\alpha-1) & 0 \\ 0 & (-\alpha-3) & (3-2\alpha) & \beta \\ 0 & 0 & -(\alpha-2)^2 & \gamma-2\beta \end{array}\right)$$

Una vez que tenemos el escalonamiento, evaluamos para que valores de α nuestro sistema tiene solución, para eso hay que estudiar lo que pasa cuando los valores en la diagonal se hacen 0, i.e., los casos en donde $\alpha = -3$ y $\alpha = 2$
Si los valores son distintos de 0, entonces nuestro sistema tiene una solución única. (pregunta (a))

Por ejemplo para $\alpha = 2$ se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-2\beta \end{array}\right)$$

Por lo que si $\gamma \neq 2\beta$ entonces el sistema no tiene solución.
Si $\gamma = 2\beta$ entonces queda una fila de ceros, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.
Para $\alpha = -3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \beta \\ 0 & 0 & -25 & \gamma-2\beta \end{array}\right)$$

Escalonando $F_3 + 25/9F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-2\beta+25/9\beta = \gamma+7/9\beta \end{array}\right)$$

Es decir si $\gamma = -7/9\beta$ existen infinitas soluciones y si $\gamma \neq -7/9\beta$ entonces no existe solución.
Para $\alpha = 7$, como $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq -3$, el sistema tiene una solución única, por lo que A es invertible.

.