MA1102-4. Álgebra Lineal-2021.
Profesor: Jaime San Martín A.
Auxiliares: Victoria Andaur O. & Félix Brokering P.
24 de agosto de 2021

Auxiliar 1: Matrices

P1. (a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}$ simétricas, demuestre que: AB es simétrica $\Leftrightarrow AB = BA$.

(b) Sea A matriz cuadrada de $n \times n$. Pruebe que A es invertible si y solo si A^k es invertible para algún $k \geq 1$.

(c) Sea $N \in \mathcal{M}_{nn}$. Diremos que N es nilpotente si $\exists k \in N$ tal que $N^k = 0$. ¿Puede N ser invertible?

(d) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ verifica $A^3 + A^2 + A + I = 0$ entonces es invertible.

P2. Sea $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ la matriz siguiente:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ o bien } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{si } j \neq i+1 \end{cases}$$

(a) Demuestre que la matriz $D = B^2$ satisface:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+2 \\ 0 & \text{si } j \neq i+2 \end{cases}$$

(b) Usando el resultado anterior demuestre por inducción en m que B^m es la matriz

$$b_{ij}^m = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+m \\ 0 & \text{si } j \neq i+m \end{cases}$$

(c) Escriba la matriz B^n

P3. Recordemos que una matriz A se dice triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}$ matrices triangulares inferiores, demuestre que:

(a) AB es triangular inferior

(b) $(AB)_{ii} = (BA)_{ii},\ \forall i \in 1, \dots, n$

(c) **Propuesto**: De existir, A^{-1} es triangular inferior y $(A^{-1})_{ii} = (A)_{ii}^{-1}$

P4. P1 Primavera 2017 Considere el sistema de 3×3:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & (\alpha-1)z & = & 0 \\ 2x & + & (1-\alpha)y & + & z & = & \beta \\ (\alpha+1)x & - & 4y & + & z & = & \gamma \end{array}$$

Encuentre condiciones sobre α, β, γ de modo que el sistema:

(a) Tenga solución única

(b) Tenga infinitas soluciones

(c) Considere:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha-1 \\ 2 & 1-\alpha & 1 \\ \alpha+1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

y pruebe que para $\alpha = 7$ la matriz es invertible