MA1002-1/4 Cálculo Diferencial e Integral, Primavera 2021
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar Extra C2: Integración

P1. *a*) **Integral Definida**

Para f una función impar y continua, calcule la siguiente integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + f(\frac{1}{4} - \sin(x))}{\sec(x)} dx$$

b) **Sumas de Riemann**

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (ln(n+i) - ln(n))$$

c) **Teorema Fundamental del Cálculo**

Determine la función continua f y el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ que cumplen la ecuación:

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}$$

d) **L'Hopital y Regla de Leibniz**

Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^3} e^{u^2} du}{\displaystyle\int_0^{x} \sin(u^2) du}$$

e) **TVM Integral**

Sean $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g(x) > 0, \forall x \in [0, \infty)$ y $f(0) = 0$. Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(\frac{x}{n}) g(x) dx = 0$$

P2. *a*) Se define $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n(x) dx$$

Demostrar que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}, \forall n \geq 2$

b) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n^2 + (i-1)^2}$$

Indicación: Le puede ser útil pensar en sumas de Riemann.

c) Demostrar que:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

No depende de x y Calcule su valor $\forall x > 0$

d) Considere la función definida por la regla

$$g(x) = sen(x) \int_0^x f(t)cos(s)dt - cos(x) \int_0^x f(t)sen(t)dt$$

Donde f es una función continua en $\mathbb{R}$.
Pruebe que $g''(x) + g(x) = f(x)$. Usando esto demuestre que si $f(0) > 0$ entonces g tiene un mínimo local en g.

e) Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

I Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i), \; \forall n \geq 2$$

II Considere $f(x) = ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{(-n+1)} \leq n!, \; \forall n \geq 1$$

f) Demuestre que $\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} sen(x)}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$

Intuición sumas de Riemann e Integración definida

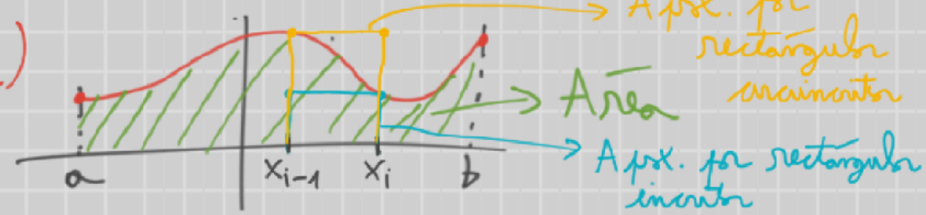
Objetivo: Calcular el área bajo la curva de una función f positiva y en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$:

Utilidad: Por ejemplo, en un gráfico de velocidad (m/s) vs tiempo (s) calcular la distancia recorrida (velocidad $\cdot$ tiempo $=$ m).

Estrategia: Dividir $[a,b]$ en n partes iguales (partición equiespaciada) de tamaño $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Así, los ptos de división serán de la forma $x_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$, $i = 0, \dots, n$, y con ello $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$. Ahora se aproxima área con rectángulos:

Suma Superior: $$S^+(f,P) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)}_{=: M_i(f,P)} \cdot \Delta x$$ (Área Rectángulos circunscritos)

Suma Inferior: $$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)}_{=: m_i(f,P)} \cdot \Delta x$$ (Área Rectángulos Inscritos)



Si $I_+(f) := \inf\{S^+(f,P) : P \text{ es partición de } [a,b]\}$ (integral superior, la más pequeña suma superior) coincide con $I_-(f) := \sup\{S(f,P) : P \text{ es partición de } [a,b]\}$ (integral inferior, la más grande suma inferior) entonces f se dice integrable y se define $\int_a^b f(x)\,dx := I_+(f) = I_-(f)$.

P1. *a)* **Integral Definida**

Para f una función impar y continua, calcule la siguiente integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+f(\frac{1}{4}-\sin(x))}{\sec(x)}dx$$

calcular una integral definida es calcular una primitiva y evaluar los límites de integración

Para calcular $\int_a^b g(x)\,dx$ debo encontrar φ una primitiva de g $(\varphi'=g)$ y usar que por TFC $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \varphi'(x)\,dx = \varphi(b)-\varphi(a)$.

Notar que como el integrando es continuo (f lo es) entonces es integrable y:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1+f(1/4-\sin(x))}{\sec(x)}\,dx = \int_0^{\pi/6} (1+f(1/4-\sin(x)))\cos(x)\,dx$$

$$\frac{1}{\sec(x)} = \cos(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{C.V.: } u = 1/4-\sin(x) \\ du = -\cos(x)\,dx \\ x=0 \Rightarrow u = 1/4 \\ x=\pi/6 \Rightarrow u=-1/4 \end{array}}$$

$$= -\int_{1/4}^{-1/4} (1+f(u))\,du = \int_{-1/4}^{1/4} (1+f(u))\,du = \int_{-1/4}^{1/4} 1\,du + \underbrace{\int_{-1/4}^{1/4} f(u)\,du}_{=0}$$

$=0$ (f es impar integrando sobre intervalo simétrico c/r al origen)

$$= [u]_{u=-1/4}^{1/4}$$

$$= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \blacksquare$$

b) **Sumas de Riemann**

Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ln(n+i)-ln(n))$$

Obs: Cuando f es continua entonces es integrable en $[a,b]$ y:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

Así, notemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln(n+i)-\ln(n)) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{n+i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} \quad (**)$$

Debemos encontrar a y b. Para ello, reconocemos:

- $\frac{b-a}{n} = \Delta x = \frac{1}{n} \implies b-a=1 \quad (*)$
- $\underbrace{a+i\frac{b-a}{n}}_{\overset{(*)}{=} a+\frac{i}{n}} = x_i = 1+\frac{i}{n} \implies a=1. \overset{(*)}{\implies} b=2$

Luego, como $\ln(\cdot)$ es continua:

$$\left(\begin{matrix} u=\ln(x) & dv=1\cdot dx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=x\end{matrix}\right)$$

$$(**) = \int_1^2 \ln(x)\,dx = \int_1^2 \underbrace{\ln(x)}_{u}\cdot\underbrace{1\,dx}_{dv} = uv\Big|_1^2 - \int_1^2 v\,du = [x\ln x]_{x=1}^2 - [x]_{x=1}^2 = 2\ln(2)-1\ln(1)-(2-1)$$

$$= 2\ln(2)-1 \blacksquare$$

c) **Teorema Fundamental del Cálculo**

Determine la función continua f y el valor de la constante $a \in \mathbb{R}$ que cumplen la ecuación:

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \quad (*)$$

$\underline{\text{TFC}}$: integral de función integrable es continua, integral de función continua es derivable

Como la ec. se tiene $\forall x \geq a$, entonces evaluando en $x=a$:

$$6 + \underbrace{\int_a^a \frac{f(t)}{t^2}\,dt}_{=0} = 2\sqrt{a} \implies \cancel{6}^{\,3} = \cancel{2}^{\,1}\sqrt{a} \underset{(\cdot)^2}{\implies} a = 9.$$

Para encontrar f ahora derivamos $(*)$ (c/r a x) (se puede por TFC: como $f(t)$ es continua en $[9,x]$, $\frac{f(t)}{t^2}$ también lo es y por ende su integral entre 9 y x es derivable):

$$\frac{f(x)}{x^2} = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x^{-1/2} \implies f(x) = x^{3/2}$$

d) **L'Hopital y Regla de Leibniz**

Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^3} e^{u^2}\,du}{\displaystyle\int_0^{x} \sin(u^2)\,du}$$

Regla de Leibniz: Para $u, v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y f continua:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt\right) = f(u(x))\,u'(x) - f(v(x))\,v'(x)$$

lo verán tarta (obs: si $u(x)=x$ y $v(x)=$ cte se recupera el TFC)

Notar que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{u^2}\,du}{\int_0^{x} \sin(u^2)\,du} \quad \left(= \frac{0}{0}\right)$$

Leibniz y TFC

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^3} e^{u^2}\,du\right)}{\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x} \sin(u^2)\,du\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^6}\cdot 3x^2}{\sin(x^2)} = 3\lim_{x\to 0} \cancel{e^{x^6}}^{\,1} \cdot \frac{1}{\cancel{\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right)}^{\,1}}$$

(e^{u^2} y $\sin(u^2)$ son continuas)

$= 3$ ■

alg. de límites

e) **TVM Integral**
Sean $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $g(x) > 0, \forall x \in [0, \infty)$ y $f(0) = 0$. Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(\frac{x}{n})g(x)dx = 0$$

Sea $n \geq 1$ arbitrario. Notar que:

$$\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) g(x)\,dx = n\cdot\int_0^{1/n} \underbrace{f(u)\,g(nu)}_{h(u)}\,du$$

h(u) continua en $[0, \frac{1}{n}]$ (pues f y g lo son)

$$\left(\begin{array}{l} \text{C.V.}: u = \frac{x}{n} \\ du = \frac{1}{n}dx \\ x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=1 \Rightarrow u=\frac{1}{n} \end{array}\right)$$

Por TVM integral, $\exists \alpha_n \in [0, \frac{1}{n}]$ tq:

$$n\cdot\int_0^{1/n} h(u)\,du = \cancel{n}\cdot h(\alpha_n)\left(\frac{1}{\cancel{n}} - 0\right) = h(\alpha_n) = f(\alpha_n)\,g(n\alpha_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$$ (era arbitrario)

Luego, como $0 \leq \alpha_n \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tomando $n\to\infty$ se concluye por sandwich que $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, y así $\forall n \in \mathbb{N}$:

continuidad de f y $|\cdot|$ pues $\alpha_n \to 0$
$\Rightarrow f(\alpha_n) \to f(0)$
$\Rightarrow |f(\alpha_n)| \to |f(0)|$

$$0 \leq \left|\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) g(x)\,dx\right| = |f(\alpha_n)|\cdot|g(n\alpha_n)| \leq |f(\alpha_n)|\cdot\underbrace{\sup_{x\in[0,1]} |g(x)|}_{=M} \xrightarrow[n\to\infty]{} |f(0)|\cdot M \overset{f(0)=0}{=} 0\cdot M = 0.$$

$= M$ (por Weierstrass pues g es continua en $[0,1]$)

Por sandwich entonces concluimos que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) g(x)\,dx = 0 \blacksquare$$

MA1002-1-4 Cálculo Diferencial e Integral 2021, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez y Javier Santidrián
correo: pyanez@dim.uchile.cl

TFC y repaso Riemann

3 de noviembre de 2021

P1. Se define $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^n(x)dx$$

Demostrar que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$

a) Intuición: lo que tenemos que tener claro es que nos piden demostrar una igualdad entre Integrales que dependen de un n, entonces esto son sucesiones de integrales? Además debemos comenzar en un lado, y se recomienda el que te entrega mayor información respecto a la definición. Luego una vez que reemplazamos la definición se recomienda el ver como con propiedades de integral las puedo juntar, además de poder formar algo dentro de la función que sea más familiar para integrarlo algo como función y su derivada, puede servir, y ver que con un cambio de variable puedo pasar a solo integrar polinomios puede ser bastante conveniente.

b) Teoría: Acá podemos notar que por algo nos piden que sea $\forall n \geq 2$ esto es para que esté bien definido cada I_i, además la integral debe estar bien definida, es decir debe ser integrable, que hipótesis puedo verificar?

c) Matraca: Trabajar la integrar y juntar todo de buena manera, recuerden siempre el diferencial, y que cuando ocupo el Teorema de cambio de variable no debo dejar ambas variables en los integrando, además de que cuando tengo límites definidos igual debo estudiarlos!

P2. Sean u, v: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y f una función continua y sea $G(x) = \displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt$.
Muestre que $G'(x) = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$

a) Intuición: Al ver este ejercicio lo primero que se debe venir a la mente es TFC pero en su forma con los límites bien definidos, esto es una muy buena intuición para partir.

b) Teoría:Luego debo ver las condiciones de que esté bien definido, y que en este caso mi límite superior e inferior dependen de la variable x, además de que la variable dentro de la integral y su diferencial son variables mudas, esto debo tenerlo muy claro para poder trabajarlo de buena manera.

c) Matraca:Para la matraca es recordar la regla de la cadena teniendo claro lo anterior, además de aplicar el Teorema que me aliviará la carga para el ejercicio.

P3. Demostrar que:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

No depende de x y Calcule su valor $\forall x > 0$

a) Intuición: Lo que podemos notar de manera general que este es un caso particular del ejercicio anterior, esto será esencial y que por algo las cosas van en orden!!
Además de si quiero probar que algo es constante tengo algunas equivalencias, una sería con su derivada que en este caso es conveniente.

b) Teoría: Justificar por que cada una de esas integrales está bien definida, son integrables?Ahora bien si quiero ver que es constante y estudiamos la derivada debemos tener en cuenta que al derivar la integral habrá una regla de la cadena entre medio que no puedo olvidar, además que tengo los límites de la integral bien definido así que por lo menos deberé hacer un TFC por cada integral.

c) Matraca: Ya teniendo claro como atacar el ejercicio, comenzar a aplicar lo visto en el problema anterior, no olvidar lo que es constante, lo que es variable de dependencia y lo que es variable muda, ,luego solo seguir y llegar a lo esperado para que sea constante.

P4. Estudia que ocurre con buena propiedad le entrega la paridad de una función para ser integrada, asumiendo que ya está bien definida, ¿Qué ocurre si la integro simétricamente?

a) Intuición: Quiero estudiar una función genérica en un domino simétrico, por lo que me defino sin perdida de generalidad un intervalo simétrico de la forma $[-a, a]$, luego de esto debo ver dos casos:
I) Función par:

$$\forall x \in [-a, a], \;\; f(x) = f(-x)$$

II) Función Impar:

$$\forall x \in [-a, a], \;\; f(x) = -f(-x)$$

Ahora el separar esta integral puede ser conveniente, lo que me permitirá usar mi hipótesis de paridad en cada caso.(Transformación lineal)
El área de una cantidad finita de puntos es nula.

b) Teoría: El enunciado nos entrega directamente esta parte, por lo que me preocupo solo de las caracterizaciones de paridad ya entregadas.

c) Matraca: Expresar lo que te piden y trabajarlo mediante lo mencionado en la parte anterior, seprar de manera conveniente y recordar que un buen cambio de variable puede arreglar problemas de signos para poder así hacer que aparezca la forma de hipótesis de paridad.

P5. Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

I Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i), \; \forall n \geq 2$$

II Considere $f(x) = ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{(-n+1)} \leq n!, \; \forall n \geq 1$$

a) Intuición:
I) Nos piden un ejercicio con dos partes que tiene una doble desigualdad, por lo que usaremos sumas de Riemann, eso no deben dudarlo, además vemos que nos dicen en que partición trabajar, por lo que no será tan complicado definir todas las cosas.
Ahora debo ver de que tipo es, equiespaciada o diferente? Una vez que tenemos esto, podemos comenzar a hacer los pasos que ya definimos en los problemas de sumas de Riemann.
II) La intuición debe ser usar la parte anterior, el pensamiento es para algo me hicieron desarrollar la parte anterior.

b) Teoría:
I) Vemos que me entregan características de la función las cuales debo usar para poder asegurarme que la función sea integrable realmente, notar desde donde está definido cada suma inferior o superior en su definición en el resumen (índice).
II) DEBE CUMPLIR CADA UNA DE LAS CONDICIONES DE LA PARTE ANTERIOR LA FUNCIÓN QUE NOS DICEN.

c) Matraca: Ver como definir de buena manera cada uno de los elementos m_i, M_i que recordemos que por definición son $m_i = inf\{f(x)\ ,\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \wedge M_i = sup\{f(x)\ ,\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \wedge a, b, \triangle x_i, x_i$ para luego poder reemplazar cada elemento en la desigualdad que cumplen las funciones integrables. Para la segunda parte una vez que vemos lo anterior, queda matraquear de buena manera y además no olvidar el caso $n = 1$, dado que lo anterior se cumple $\forall n \geq 2$ y nos piden demostrar $\forall n \geq 1$.

P6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa en $[a, b]$. Pruebe que si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ entonces $f(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$

a) Intuición:Este ejercicio en un comienzo me entregan una serie de hipótesis, para luego probar algo, entonces este será la parte teórica.
Tenemos que probar una implicancia de la forma $p \Rightarrow q$, la cual tenemos una serie de formas de probarla según vimos en introducción al álgebra.
En su defecto esta vez lo haremos por el método de contradicción, dado que lo que quiero probar es algo de no mayor dificultad de negar, y que puedo generar un absurdo. Desarrollando la manera directa cuesta un poco más arar el argumento, pero igual es posible.

b) Teoría: Para este ejercicio será bueno tener en cuenta ciertas cosas como la tricotomía de los reales, es decir que cuando un número es diferente de 0 debe ser positivo o negativo, además también que si tengo un número que es estrictamente positivo, siempre habrá un otro que viva entre él y 0, por densidad de $\mathbb{R}$.
En efecto considerar que en la página 89 del apunte hay propiedades de integrales que pueden ser útiles, en este caso la desigualdad

1) Desigualdad de funciones:

$$if\ f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Ojo que esto según la propiedad 5 en la página 89 es con valor absoluto, pero para este caso particular del ejercicio asumimos que la función está definida con imagen solo en los positivos. Analizar que debo cambiar para hacer la desigualdad estricta.

2) Desigualdad de intervalos en el dominio encajonados:

$$if\ [c, d] \subseteq [a, b] \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_c^d f(x)dx$$

Luego cual será la condición para tener la desigualdad estricta? Recordar que ocurre con una función continua en un cerrado y acotado. En particular en $[x_o - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

c) Matraca: Luego de poder usar todos los preeliminares, la matraca de este ejercicio es comenzar de la hipótesis de buena manera y acotar de manera que llego a una contradicción.

P7. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n^2 + (i-1)^2}$$

Indicación: Le puede ser útil pensar en sumas de Riemann.
ESTIMADOS Y ESTIMADAS EN ESTE PROBLEMA HUBO UN PROBLEMA DE TIPEO
Ejercicio original Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + (i-1)^2}}$$

Ejercicio Propuesto SPOILER da 0, por qué? Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n^2 + (i-1)^2}$$

P8. Considere la función definida por la regla

$$g(x) = sen(x) \int_0^x f(t)cos(s)dt - cos(x) \int_0^x f(t)sen(t)dt$$

Donde f es una función continua en $\mathbb{R}$.
Pruebe que $g''(x) + g(x) = f(x)$. Usando esto demuestre que si $f(0) > 0$ entonces g tiene un mínimo local en g. Ejercicio Teorema Fundamental del cálculo(TFC) y Optimización.

P9. Demuestre que $\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} sen(x)}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$

a) Intuición: Para poder atacar este ejercicio lo mejor es pensar en las propiedades de integrales, intentamos encontrar una cota superior constante, entonces pensar en las cotas de las funciones trigonométricas de intro al cálculo, siempre está acotado entre -1 y .
Además recordar que estoy acotado entre los límites de la integral por lo que si estudio las funciones que quedan, como la exponencial tiene un crecimiento determinado, podré encontrar una cota superior.

b) Teoría:Analizar las funciones dentro de la integral y verificar bajo una condición que esté bien definido.

c) Matraca:Acotar y acotar superiormente.

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable la función $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.
- **TFC 1:** Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces $\forall x \in int(I)$:
$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$$
- **Corolario del TFC 1:** Si la función F, continua en I es una primitiva cualquiera de f en I, entonces:
$$\forall a.b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$
- **TFC 2:** Sea f integrable en (a,b) si existe una función tal que: $F' = f$ en (a,b), entonces:
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
- **Integración por Partes:** Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y con derivadas continuas en (a,b), entonces:
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$
- **Integración por sustitución:** Sea g continua en $[a,b]$ y con derivada continua en (a,b). Sea f continua en $g([a,b])$, entonces:
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$
- **Valor Medio:** Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Se llama valor medio de f en $[a,b]$ a
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$
Se anota como $\overline{f}$ o $\langle f \rangle$.
- **TVM-integrales:** Si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists \xi(a,b)$ tal que $f(\xi) = \langle f \rangle$, es decir:
$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$
- **TVM Generalizado - integrales:** Si f es continua en $[a,b]$ y g es integrable en $[a,b]$, que no cambia de signo, entonces $\exists \xi(a,b)$ tal que
$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$$

P1)

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^m(x)\,dx$$

PDQ: $I_m + I_{m-2} = \frac{1}{m-1}$, $\forall m \geq 2$

Intuición: cuando tenemos integrales con términos m-ésimos tenemos 2 caminos que sea probar una iteración o bien una igualdad.
ahora estamos en el segundo caso

Teoría: $\tan(x)$ es una función bien portada, hay que ser rigoroso para $\forall m \geq 2$ y el Teorema C.V a usar

Matraca: a darle ⇓

En efecto

$$I_m + I_{m-2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^m(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{m-2}(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{m-2}(x)\underbrace{\left[\tan^2(x) + 1\right]}_{\sec^2(x)}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{m-2}(x)\sec^2(x)\,dx$$

Sea

Qué ocurre con los límites.

$u = \tan(x)$

$du = \sec^2(x)\,dx$

$\underline{0|}\ \tan(0) = 0 \Rightarrow u = 0$ si $x = 0$

$\frac{\pi}{4}\Big|\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow u = 1$ si $x = \frac{\pi}{4}$

$$L \Rightarrow \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2}(x)\sec^2(x)\,dx = \int_0^1 u^{n-2}\,du$$

$$= \frac{u^{n-1}}{n-1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n-1} - \frac{0}{n-1}$$

$$= \frac{1}{n-1} \quad // \quad \forall n \geq 2$$

6) fuera menor no estaría bien def I_{n-2}

P2.1

$u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y $G(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt$

pdq) $G'(x) = f(u(x))\,u'(x) - f(v(x))\,v'(x)$

En efecto por TFC $F' = f$ (en interior. pues f continua

$$G(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = F(u(x)) - F(v(x))$$

$$G'(x) = f(u(x))\,u'(x) - f(v(x))\,v'(x)$$

Lo que cabe destacar es que esto se puede realizar en amparo al TFC. este nos permite decir que la primitiva será una función y es más continua.

I: Directamente TFC.

P3)

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$$

$f(a) = \frac{1}{1+a^2}$ → continua entonces puedo usar P2)

Ver que no depende de x y calcular su valor

Esto es equivalente a que $F(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

$F'(x) = 0$

En virtud de TFC

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot x' - \frac{1}{1+0^2} \cdot (0)' + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{1}{1+0^2} \cdot (0)'$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x^2+1} \cancel{x^2} \cdot -\frac{1}{\cancel{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Luego $F(x) = c$, $\forall x > 0$ bien define integral

Si $x = 1$ debe cumplirlo!

$$F(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} . \; 2\operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1$$

$$= 2[\operatorname{arctg}(1) - \cancel{\operatorname{arctg}(0)}^{\,0}]$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Preliminar

$\operatorname{arctg}(0) = 0$ pues $\tan(0) = 0$

$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ pues $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

P41

Paridad e imparidad

$f(x) = f(-x)$ $\qquad$ $f(x) = -f(x)$

si f es par ; $a = -b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx \; ;$$

Haré el cambio de variable con la primera integral

$u = -x$

$du = -dx$

los límites.

$u = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x = -b \Leftrightarrow u = b$

$$= \int_b^0 f(-u) - du + \int_0^b f(x)\,dx$$

$\int_a^b = -\int_b^a$

$$= \int_0^b f(-u)\,du + \int_0^b f(x)\,dx$$

Paridad

$$= \int_0^b f(u)\,du + \int_0^b f(x)\,dx = 2\int_0^b f(x)\,dx \quad //.$$

f impar

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

$u = -x$ | $x = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$du = -dx$ | $x = -b \Leftrightarrow u = b$

$$= \int_{b}^{0} f(-u) - du + \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{b} -f(-u)\,du + \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{b} f(u)\,du + \int_{0}^{b} f(x)\,dx = 0 \quad //$$

P3) $f: [1,\infty[\to \mathbb{R}$ no negativa y creciente.

a)

Como creciente

$f(1) \leq f(x) \leq f(n)$, $\forall x \in [1,n]$

Como f es monótona y acotada es integrable

$P = \{x_0 = 1, x_1, \ldots, x_{n-1} = n\}$

$x_i = i+1$, $i \in \{0, \ldots n-1\}$

$M_i = f(x_i) = f(i+1)$

$m_i = f(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) = f(i)$ $\quad \Delta x_i = 1$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(i+1)$$

$$= \sum_{i=2}^{n} f(i)$$

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

$$\Rightarrow \quad s(f,P) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i), \quad \forall n \geq 2$$

b) $f(x) = \ln(x)$

$\ln(x)$, si $x \in [1, \infty)$ positiva y creciente
≥ 0

Usando a)

1) $\sum_{i=1}^{m-1} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=1}^{m-1} i\right) = \ln((m-1)!)$

2) $\sum_{i=2}^{m} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=2}^{m} i\right) = \ln(m!)$

3) $\int_1^m \ln(x)\,dx = \left(x\ln(x) - x\right)\Big|_1^m = m\ln(m) - m + 1$

$\ln((m-1)!) \leq m\ln(m) - m + 1 \leq \ln(m!)$ / e creciente

$(m-1)! \leq e^{m\ln(m) - m + 1} \leq m!$

$(m-1)! \leq e^{m\ln(m)} e^{-m+1} \leq m!$

$(m-1)! \leq m^m e^{-m+1} \leq m!$ // ; si $1 = n$ se tiene $1 \leq 1 \leq 1$

$\forall m \geq 1$

P4) $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, no negativa.

PDQ) $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

1) Sea $a < c < d < b$

$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_c^d f(x)\,dx$ y f tambien es continua en $[c,d]$

2) Sea $g(x) > f(x)$ en $[a,b]$

$\int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx$

I) tenemos $p \Rightarrow q$ procederemos por contradicción.

II) $f(x) \neq 0$ entonces para algún $x_0 \in [a,b]$

$f(x_0) > 0$, Como f es continua debe existir $\varepsilon > 0$

$\exists \varepsilon \, \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq [a,b]$, $f(x) > 0$.

III) Luego f es continua en un cerrado y acotado por Waiestras alcanza mínimo y maximo

$M \geq f(x) \geq m > 0$ SPG $\overline{m} = \frac{m}{2}$ no es alcanzado por $f(x)$

Esto es notamente por ε.

$$f(x) \geq m > \bar{m} > 0 \quad \forall x \in [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$$

$$g(x) = \bar{m}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{(1)}{\geq} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx \overset{(2)}{\geq} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \bar{m}\,dx$$

$$= \bar{m}\,2\varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0$$

Con hipótesis

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

$$\therefore \quad f(x) = 0 \quad , \forall x \in [a,b] \quad \blacksquare$$

Continuación TFC.

P1) $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{m^2+i^2}} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{m}\right)^2}}$.

Veamos $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $f'(x) = \left(\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}\right)'$

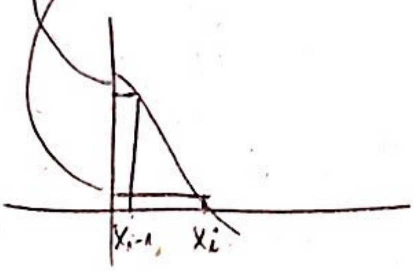
$f'(x) = -1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

Luego la función es decreciente si $x \in [0,1]$

Entonces corresponde a la suma inferior de Riemann.

$f(x_i)$ v $f(x_{i-1})$; $x_i = \frac{i}{m}$

$\sum m_i(f)\Delta x_i$



Recordamos

$$\lim \sum_{i=1}^{m} m_i(f)\Delta x_i \le \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \le \lim \sum_{i=1}^{m} M_i(f)\Delta x_i$$

En realidad tenemos la igualdad pero, la integral

Está bien definida?

En efecto la función es continua y la suma de Riemann converge a la integral

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

C.V $x = \tan(u)$

$dx = \sec^2(u)du$

limite $x=0 = \tan(u)$

$\Rightarrow u = 0$

$x = 1 = \tan(u)$

$\Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(u)}} \cdot \sec^2(u)\,du$$

$1+tg^2(x) = \sec^2(x)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(u)\,du$$

$(\sec(x) + tg(x))' = f'(x)$

$= \sec(x)\,tg(x) + \sec^2(x)$

$= \sec(x)\,(tg(x) + \sec(x))$

con $f(x) = \sec(x) + tg(x)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(u) \frac{(\sec(u) + tg(u))}{(\sec(u) + tg(u))}$$

Pág 57 Prop //

$$= \ln\left(\sec(u) + tg(u)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right) - \ln(1+0)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right) //$$

P2) $g(x) = \operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$

donde f es continua en $\mathbb{R}$. Pruebe que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se tiene que $g''(x) + g(x) = f(x)$.

Usando esto dem: si $f(0) > 0 \Rightarrow g$ tiene mín local en $x=0$.

$$g(x)' = \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \cancel{\operatorname{sen}(x)\cos(x)f(x)} + \operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$$- \cancel{\cos(x)\, f(x)\operatorname{sen}(x)}$$

$$= \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow g''(x) = -\operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \cos^2(x) f(x) + \cos(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$$+ \operatorname{sen}^2(x) f(x) = -\operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \cos(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$$+ f(x) \Rightarrow g''(x) + g(x) = f(x) \;//$$

$$g'(x) = \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$x = 0$

$$g'(0) = \cancel{\cos(0)}^{1}\cancel{\int_0^0 f(t)\cos(t)\,dt}^{0} + \cancel{\operatorname{sen}(0)}^{0}\cancel{\int_0^0 f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt}^{0}$$

$g'(0) = 0$ → derivada nula en punto

Análisis segunda derivada

sabemos $g''(x) + g(x) = f(x)$

$g''(x) = f(x) - g(x)$; $x = 0$

$g''(0) = f(0) - g(0) > 0$

$= f(0) > 0$

$g(0) = 0$ mismo argumento.

tenemos condiciones necesarias para mín local!

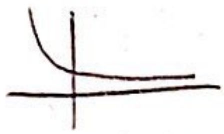
$$\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x)\,dx}{1+x^2}\right| \le \frac{\pi}{12e}$$

$$\le \int_1^{\sqrt{3}} \left|\frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right| dx$$

$$\le \int_1^{\sqrt{3}} \frac{|e^{-x}|\,|\operatorname{sen}(x)|}{1+x^2}\, dx \qquad , \quad |\operatorname{sen}(x)| \le 1$$

$$\le \int_1^{\sqrt{3}} \frac{|e^{-x}|}{1+x^2}\, dx$$

$e^{-1} > e^{-x}$, $x \in [1, \sqrt{3}]$



decreciente

$$\le \frac{1}{e}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{e}\left(\operatorname{arctg}(x)\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi}{12e}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$