

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez

Correo: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar 7: Aplicaciones de Derivadas (El regreso)

2021

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Se tiene lo siguiente

- Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente.
- Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente.

Análogo para estrictamente creciente/decreciente

- [Convexidad]** Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa si $\forall x, y \in [a, b], x < y$ se tiene que

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right] (z - x), \quad \forall z \in (x, y)$$

o equivalentemente

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

- Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y sólo si f' es creciente en (a, b) . En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f será convexa si $f'' \geq 0$.

- [Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente

- [Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]**

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(k+1)$ -veces derivable en todo punto del intervalo (a, b) . Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \bar{x}$ (respectivamente $x < \bar{x}$) existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ (respectivamente $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que:

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!} (x - \bar{x})^{k+1}$$

Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$

- [Fórmula de Leibnitz]** Para f y g funciones con derivadas de orden n en a , la derivada de orden n de $(f \cdot g)$ está dada por:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

Estimados y estimadas, espero estén de lo mejor acá estaría la NO PAUTA, de la auxiliar pasada, recuerden para estudiar revisar este material primero, luego de haberle dado su tiempo al ejercicio al desarrollo final.

- P1.** Sea la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, con dominio \mathbb{R}^+ , $\mathcal{Z}(x) = \{1\}$, negativa si $x \in (0, 1)$, positiva si $x \in (1, \infty)$. Luego justifique su continuidad, para poder hacer su estudio cuando $x \rightarrow 0 \wedge x \rightarrow \infty$, a partir de esto calcule su derivada y crecimiento, donde concluya si hay máximos o mínimos, si es que existen, además estudie convexidad.

- P2.** Analizar completamente la función $f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{x}}$ incluyendo:

- Dominio, paridad, signos y ceros
 - Determine límites laterales en $x = 0$ y continuidad ¿Es reparable?
 - Determine asíntotas
 - Estudie crecimiento y concavidad
 - Dibuje el gráfico indicando puntos importantes
- a) Intuición: Para este ejercicio hay que recordar varias cosillas de MA1001(Intro), entre ellas la intuición es realizar cada una de las partes que pide la función, no de manera robótica y por

inercia. Más bien hacerlo entendiendo lo que esto significa para la función (gráficamente), por lo que interpretar esto es fundamental.

- b) Teoría: Es cada una de las definiciones de lo que piden, están las pueden encontrar en el resumen subido a material c:

Recordar que dominio es todos los puntos donde la función esté bien definida.

Paridad está en le resumen como se caracteriza de manera ecuacional[Pág 2] [Resumen](#), donde lo que interpreta la paridad es que es simétrica respecto al eje Y, y la imparidad es simétrica respecto al origen.

Ceros es cuando la función corta al eje X.

Límites laterales es la definición de límite pero cuando ocurre $x \rightarrow \bar{x}^+ \vee x \rightarrow \bar{x}^-$. ¿Cuándo es reparable? tendrá que ver con la igualdad de los laterales?

Asíntotas recordemos que hay 3 tipos, todas están resumidas acá [Resumen auxiliar 4](#) donde deben estudiar todos los tipos, con ayuda de lím conocidos !

Para concavidad capítulo 4 del apunte! recuerden los criterio de estudiar $f(x) \wedge f'(x)$ y estudiar su signo, o ver el crecimiento de $f'(x)$.

- c) Matraca: La matraca es hacer todos los cálculos, en un comienzo plantear las ecuaciones para definir bien la función, comprobar las de paridad, calcular las derivadas y límites.

Para los propuestos análogos de estudio de funciones les adjuntaré al final los gráficos correspondientes, donde podrán comprobar sus desarrollos!!!

- P3.** a) Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables que verifican lo siguiente:

$$g(x) = xf(x) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g(x+y) = g(x)g(y), \quad f(0) = 1$$

1) Demuestre que $g'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) Demuestre que $\forall n \geq 1, g(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$ y calcule $f^{(n)}(0)$.

- b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+x\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$$

existe, es positivo y calcúlelo.

- a) Intuición: a)

1) La primera pregunta tiene una intuición de calcular la derivada a la fuerza, pero puede que no sea tan conveniente la forma compacta, que nos queda? la definición puede ser un buen camino.

2) Si tengo derivadas enésimas, lo primero que debo pensar es en Leibnitz, esto es porque aquella fórmula nos entrega una para derivadas enésimas, pero ojo con lo que discutiremos en teoría.

b)

Tengo un exponente raro, ¿que hago? Propiedad de consistencia

DEFINICIÓN (DEFINICIÓN DE EXPONENTE IRRACIONAL) Para todo $a \in (0, \infty)$ y $n \in \mathbb{N}$ las expresiones a^n , a^{-n} y $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ tienen un significado. Ahora, vamos a extender esta definición para a^α , con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean $a \in (0, \infty)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define a^α como:

$$a^\alpha := \exp(\alpha \ln a).$$

Observación: (Consistencia)

Como $\exp(n \ln(a)) = (\exp(\ln(a)))^n = a^n$ y $\exp\left(\frac{\ln(a)}{n}\right) = (\exp(\ln(a)))^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$, la definición extiende a \mathbb{R} el significado que habíamos asignado anteriormente a a^α .

Propiedades 10. Las siguientes propiedades son consecuencia directa de la definición de a^α .

1. $\forall a \in (0, \infty), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$.
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta$.
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (a^\alpha)^{-1} = a^{-\alpha}$.
4. $\forall \alpha, x \in \mathbb{R}, (\exp(x))^\alpha = \exp(\alpha x)$, en particular $\exp(\alpha) = e^\alpha$.
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Figura 1: Propiedad consistencia

b) Matraca: a)

- 1) Calcular el límite por definición ocupando las propiedades que predefine el ejercicio.
 - 2) Armar a la fuerza el producto de funciones que pide la derivada enésima, y expresar la expresión de forma bruta.
- b) Una vez que hago la propiedad, que puedo notar al aplicar las propiedades de logaritmo? Si llego a una expresión gané porque ya existe, luego me basta estudiar el signo.

c) Teoría: a)

- 1) ¿Por qué? existe la derivada? sería algo que debo justificar a priori, ocupe la hipótesis?
- 2) Si una de mis funciones es polinómica, a quien le coloco el coeficiente (k), además recordemos que para usar la fórmula de Leibnitz, debo cumplir todas las hipótesis que están explícitas en el resumen!

b)

El logaritmo debe estar bien definido, y cuando a un límite de cierta forma, debo cumplir ciertas hipótesis para poder hacer un desarrollo que rima con hospital.

P4. [Taylor derivado] $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces derivable, tal que $f(x) + f''(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Pruebe que es n veces derivable, y que si sabemos de antemano $f(0) = f'(0) = 0$ debe ser la función nula.

- a) Intuición: Me dan una EDO, donde yo quiero saber como se comporta, luego entonces me conviene ver cuanto me da la tercera derivada, y la cuarta, y la quinta, ¿qué pasó?, se repite? entonces que puedo concluir? Luego de descubrir que es n -veces derivable, me están dando la evaluación de la función en un punto y de su derivada, entonces tengo unas ecuaciones de las derivadas en un punto en particular, me está dando un orden, y un punto en el cual le puedo realizar su expresión de Taylor que me será de ayuda!
Luego para ver que la función es nula, como podemos llegar a un valor fijo de una función? qué ocurre si la acoto inferior y superiormente por la constante? a donde le queda ir a la función?.
- b) Matraca: Expresar de manera explícita la expansión de Taylor de la función, además de la parte anterior calcular las derivadas, pero notar que la matraca reside en la definición y ocupar las propiedades que nos definen en el enunciado (la única ecuación)
- c) Teoría: La teoría en este ejercicio, es ver que estén bien definidas las derivadas, y el por qué?. Para expresar el polinomio de Taylor este posee una hipótesis matemática que debe ser cumplida,

luego también para usar el Teorema del Sándwich para terminar el ejercicio, debo cumplir la hipótesis correspondiente.

Además debo encontrar una cota para la función que no tenga dependencia del orden de la derivada que estoy haciendo, porque de lo contrario no estaremos demostrando nada!

Propuestos

1. A desarrollar:

Estudiar completamente la función definida por

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3 \ln(x)}{x}$$

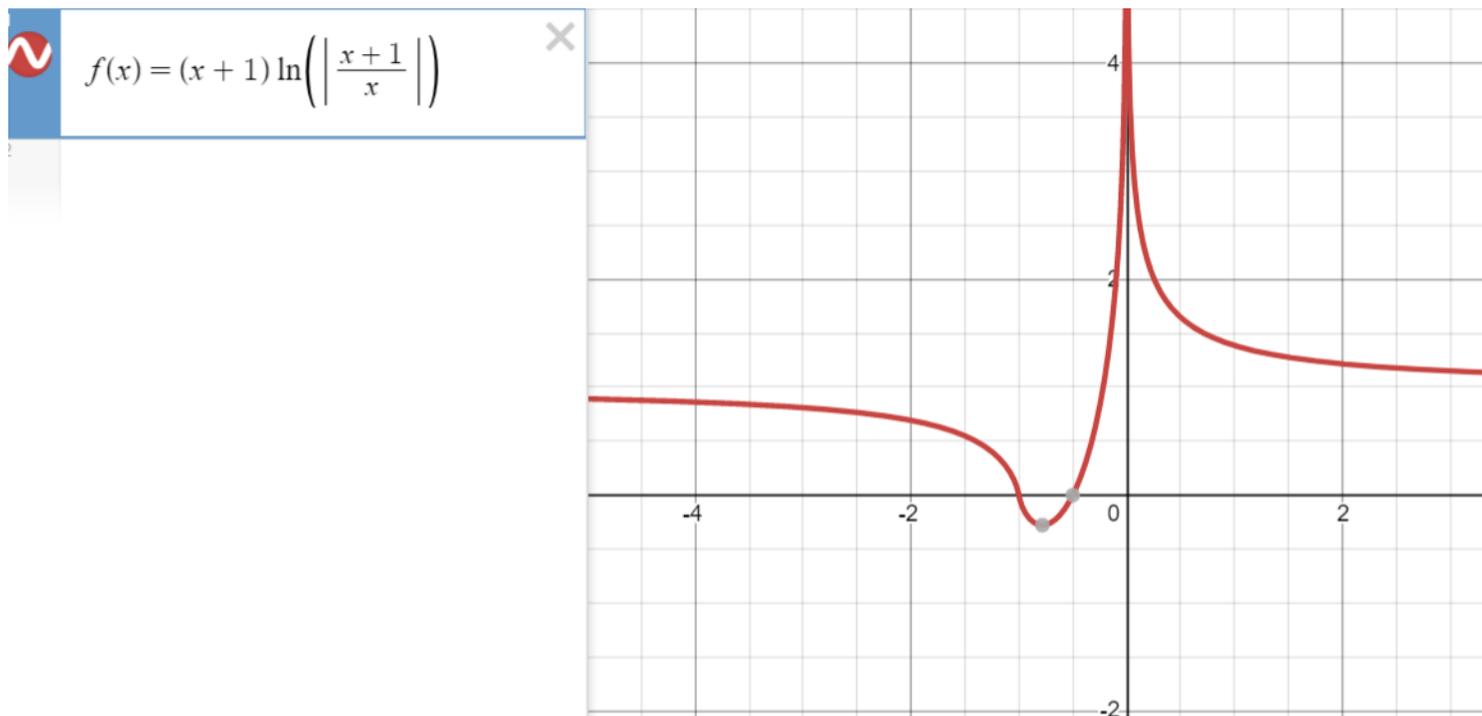


Figura 2: Gráfico para comprobar desarrollo.

2. A desarrollar x2

Considere la función $f(x) = (x + 1) \ln\left(\left|\frac{x + 1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

- Encuentre ceros y signos de f
- Estudie las asíntotas horizontales de f . Encuentre los límites laterales cuando $x \rightarrow 0^\pm$ y $x \rightarrow -1^\pm$ y ya sea, repare la función para que sea continua, o bien, detecte si hay asíntotas verticales.
- Use el teorema de valor medio en la función auxiliar $g(x) = \ln(|x|)$ en el intervalo $[x, x + 1]$ para probar que

$$\frac{1}{x + 1} < \ln\left(\frac{x + 1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

- d) Calcule la primera derivada de f . Use el resultado de la parte anterior para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$
- e) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa
- f) Estudie los límites de $f'(x)$ cuando $x \rightarrow -1^+$ y cuando $x \rightarrow 0^{-1}$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f' en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$. Bosqueje el gráfico de f



$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3 \ln(x)}{x}$$

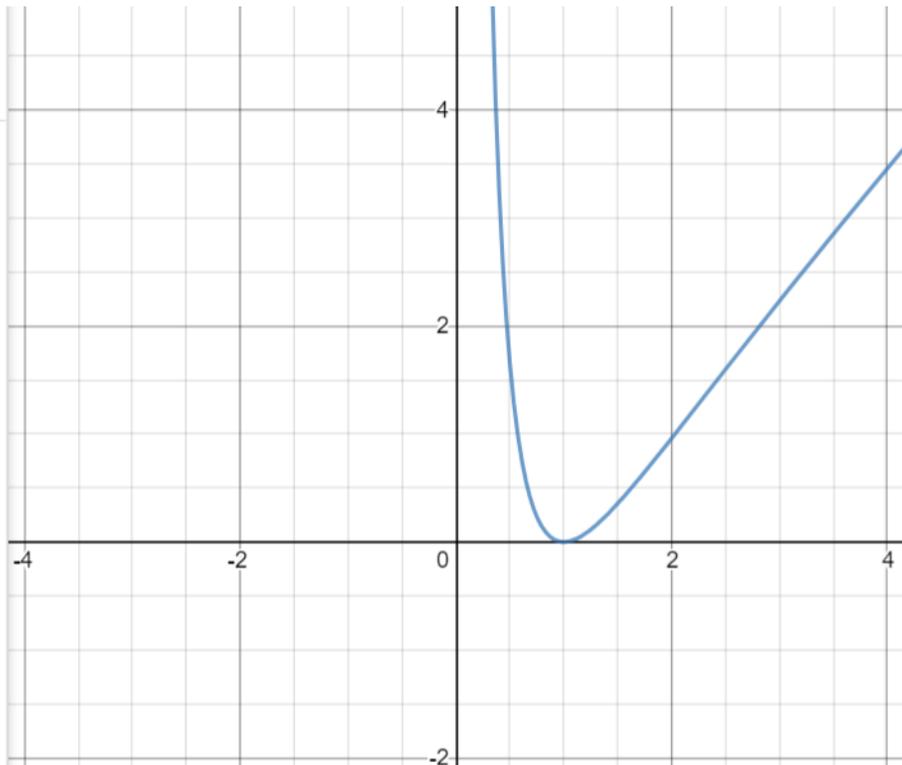


Figura 3: Gráfico para comprobar desarrollo.

*“It is not the task of the University to offer what society asks for, but to give what society needs.”
Edsger W. Dijkstra*