MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral, Primavera 2021
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar 8: Primitivas y Métodos de Integración

P1. Intuición y Resumen

Recuerdo:

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $int(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si

$$\forall x \in int(I), \quad F'(x) = f(x)$$

  Si F es una primitiva de f, entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$

- Es muy importante notar lo siguiente
  - $\int f'(x)dx = f(x) + c$
  - $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$
  - $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
  - $\int(\lambda f) = \lambda(\int f)$

- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x, entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

  o, equivalentemente $\int uv' = uv - \int u'v$

  o, de manera compacta $\int udv = uv - \int vdu$

- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables
  - para $a^2 + x^2$, usar $x = atan(v)$ o $x = asenh(v)$
  - para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(t)$ o $x = acos(t)$
  - para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o $x = acosh(v)$

  obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t

- **[Fracciones parciales]**: si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $gr(Q) > gr(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.

- **[Integrales Trigonométricas]**: Sea $R(cos(x), sen(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $sen(x)$ y $cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = tan(x/2)$.

Primitivas conocidas:

a) $\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

c) $\displaystyle\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$

d) $\displaystyle\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$

e) $\displaystyle\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$

g) $\displaystyle\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sqrt{1-x^2} + C$

h) $\displaystyle\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$

i) $\displaystyle\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$

j) $\displaystyle\int \sec^2(x) \, dx = \tan(x) + C$

k) $\displaystyle\int \mathrm{cosec}^2(x) \, dx = \mathrm{cotg}(x) + C$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

P2. Cambio de Variable

a) $\displaystyle\int \frac{e^{3\theta}}{1+e^{2\theta}} d\theta$

b) 1) $\displaystyle\int cos^5(x) dx$

2) $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x+4}\, dx$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x - x^{\frac{3}{5}}}$

4) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx$

P3. Integración por Partes

a) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$

b) $\displaystyle\int cos(ln(x)) dx$

P4. Fracciones Parciales

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx$

b) 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

2) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

P5. Sustitución Trigonométrica

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$

b) 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

P6. Integral Trigonométrica

a) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx$