MA1002-1/4 Cálculo Diferencial e Integral, Primavera 2021
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar 16-17: Extra Examen Series

7/12/21

P1. *a)* **Criterio Integral Impropia**
Determine los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente serie numérica converge:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)^p}$$

b) **Criterio del Cuociente**
Estudie si la siguiente serie converge:

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^n}{n!} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

c) **Criterio de Comparación por Cuociente**
Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{n}$$

d) **Criterio de la Raíz n-ésima**
Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$$

e) **Series de Potencias**
Considere la función definida por:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

1) Calcule el radio de convergencia y entregue el intervalo de convergencia, estudiando lo que ocurre en los extremos.
2) Calcule $f'(x), f''(x), f'(0), f(0)$.
3) Identifique $f''(x)$ como una serie geométrica e integre para encontrar explícitamente la función f.
4) Calcule el valor de la serie numérica:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$$

P2. *a)* Analiza convergencia, recuerda verificar hipótesis

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{nln(ln(n))}$$

b) Estudia la convergencia absoluta y condicional de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$$

c) Utilizando comparaciones apropiadas estudie la convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+ln(n)}$$

d) Utilizando comparaciones apropiadas estudie la convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+(n)^2}$$

e) Estudie la convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n} 2k+1}{(2n-1)3^n n!}$$

f) Sea f una función de clase $\mathcal{C}^2$ en $[0,1]$, donde verifica que la imagen nula es nula. Demuestre

$$\int_0^1 f(x)x^{\frac{-3}{2}}$$

Converge

Recuerdo:

- Una sucesión (x_n) se dirá de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N, \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

- Una sucesión es convergente si y sólo si es de Cauchy.
- Sea (a_n) una sucesión. Luego $\sum a_k$ converge si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ m > n \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

- Si $\sum a_k$ converge, entonces $a_n \to 0$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la siguiente suma converge:

$$\sum (a_k + \lambda b_k) = \sum a_k + \lambda \sum b_k$$

- Una serie de términos no negativos converge si y solo si las sumas parciales son acotadas superiormente.
- **Comparación:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de manera que existe n_0 y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < \infty$, entonces $\sum a_k < \infty$.
- **Comparación por Cuociente:** Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones positivas tales que $c = \lim \frac{a_n}{b_n}$ existe.
  - *a*) Si $c = 0$ y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.
  - *b*) Si $c > 0$, $\sum b_k$ converge si y sólo si $\sum a_k$ converge.
- **Criterio del Cuociente:** Sea (a_n) una sucesión tal que $r = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe.
  - *a*) Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
  - *b*) Si $r > 1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
  - *c*) Si $r = 1$ no se sabe.
- **Criterio de la Raíz:** Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos tal
  - *a*) Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
  - *b*) Si $r > 1$ entonces $\sum a_k$ diverge.
  - *c*) Si $r = 1$ no se sabe.

  Obs: En este criterio se puede reemplazar r por $r = \limsup_n a_n = \lim_n \sup\{a_k : k \geq n\}$
- **Criterio de la Integral:** Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f : [k, \infty) \to \mathbb{R}_+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n \geq k} f(n)$ converge si y sólo si $\int_k^\infty f(x)dx$ converge.
- Sea (a_k) una sucesión. Diremos que $\sum a_k$ es absolutamente convergente si $\sum |a_k|$ converge.
- Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además una serie es absolutamente converge si y sólo si la series de sus términos negativos y la de sus términos positivos convergen.
- Si una serie converge, pero no converge absolutamente se le dirá condicionalmente convergente.
- **Criterio de Leibnitz:** Sea (a_n) una sucesión decreciente tal que $a_n \to 0$. Entonces $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.
- Sea (a_k) una sucesión. Si $\sum |a_k|$ converge, luego cualquier reenumeración (b_k) verifica que $\sum b_k = \sum a_k$ converge.
- Sea (a_k) tal que $\sum a_k$ es condicionalmente convergente. Luego para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ existe una reenumeración b_n tal que $\sum b_k = \alpha$.
- Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series absolutamente convergentes, entonces su producto es $\sum c_k$, donde (c_k) es cualquier sucesión que contiene exactamente una vez cada producto posible. En particular podemos tomar $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.

Recuerdo:

- **[Series de Potencias]**: Una serie de potencias es una serie de la forma: $\sum_{k=0} a_k(x-\alpha)^k$, para este curso estudiaremos el caso de $\alpha = 0$.
- **[Radio de convergencia]**: Se define el radio de convergencia R como

$$R = \sup\{x_0 : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k < \infty\}$$

- **[Intervalo de convergencia]**: Se llama intervalo de convergencia al intervalo I tal que $\forall x \in I$ la serie de potencias converge, se debe cumplir que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.

  Por lo que para calcular el intervalo de convergencia I se necesita encontrar R, con esto garantizamos que I a lo menos será el intervalo abierto $(-R, R)$, luego se estudia la frontera, es decir, se estudia si la serie converge para $x = R$ o $x = -R$, en caso de converger en alguno de estos valores, se añadirá al intervalo $(-R, R)$, de esta forma se corrobora que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.
- Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias de la forma $\sum_{k \geq n_0} a_n x^n$ existe las siguientes tres formas (todas entregaran el mismo valor si existe), cual usar dependerá del ejercicio.

  1) $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
  2) $L = \lim\limits_{n\to\infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}$
  3) $L = \lim\limits_{n\to\infty} sup_{k\geq n}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$

  En caso de existir L se tiene que el radio de convergencia es: $R = \frac{1}{L}$
- Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I , definimos:

$$f(x) = \sum a_k x^k$$

  Esta función es continua, derivable e integrable. Más aún las integrales y derivadas son término a término, esto es que la derivada o la integral la pueden "pasar"para dentro de la serie
- Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para x_0. Entonces la serie $\sum(a_k + b_k)x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum(a_k + b_k)x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$. Además si $c_k \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j}$, la serie $\sum c_k x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum c_k x^k = (\sum a_k x^k)(\sum b_k x^k)$.
- Aprenderse $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$ y sus variantes y traslaciones como:
  - $f(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ para $|x| < 1$
  - $f(x-1) = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$ para $|x-1| < 1$

  Y ocupar derivadas e integrales para calcular otras funciones (por ejemplo logaritmos).

"Siempre fuertes a luchar, el trabajo tesonero todo lo vence"
La verdad fue todo un gusto y honor haberles hecho clases auxiliares, se despide la dupla Javier y Patricio, opuestos complemetarios en la matraca, nos vemos en la Uni!!

Series Numéricas

$$\sum_{n=i}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=i}^{N} a_n}_{\text{sumatoria}}$$

- Si $\sum a_n < \infty \Rightarrow a_n \to 0$ (Condición Necesaria de Convergencia)
- Si $\sum a_n, \sum b_n < \infty$

$$\Rightarrow \sum (a_n + \lambda b_n) < \infty$$

$$\text{y } \sum (a_n + \lambda b_n) = \sum a_n + \lambda \sum b_n$$

(Separación Serie)

Criterios de Convergencia:

1) Comparación
2) Comparación por Cociente
3) Cociente
4) Raíz n-ésima
5) Integral Impropia
6) Leibniz

P1

a) Criterio Integral Impropia

Determine los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente serie numérica converge.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^p}$$

Sol:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Criterio de la Integral Impropia} \\ \text{Si } f \geq 0 \text{ y decreciente en } [k, \infty) \\ (k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}), \text{ entonces:} \\ \displaystyle\sum_{n \geq k} f(n) < \infty \iff \int_k^{\infty} f(x)\,dx < \infty\end{array}}$$

Definamos $f(x) := \dfrac{1}{x \ln(x)^p}$.

Notar que $f \geq 0$ y decreciente en $[2, \infty)$. Además:

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)^p}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{u^p}\,du \quad (*)$$

C.V: $u = \ln(x)$

$du = \frac{dx}{x}$

$x = 2 \to u = \ln(2)$

$x = \infty \to u = \infty$

Sabemos que $(*) < \infty$ si $p > 1$ (II de 1° especie), luego por criterio de la integral impropia tenemos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)^p} < \infty \quad \text{si } p > 1$$

b) Criterio del cuociente

Estudie si la siguiente serie converge:

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^n}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Sol:

Criterio del cuociente

Si $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in \mathbb{R}$, entonces:

i) $r < 1 \implies \sum a_n < \infty$

ii) $r > 1 \vee r = \infty \implies \sum a_k = \infty$

Notar que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right|}{\left|(-1)^n \frac{n^n}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{n^n}{\cancel{n!}}\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}e < \frac{3}{3} = 1$$

$e = 2{,}718\ldots$

Luego por criterio del cuociente:

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^n}{n!}\left(\frac{1}{3}\right)^n < \infty \quad \blacksquare$$

c) Criterio de comparación por cociente

Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$$

Sol

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Criterio de comparación por cociente} \\ \text{Si } (a_n), (b_n) \geq 0 \ \forall n \geq n_0 \text{ tq } c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{R}, \\ \text{entonces:} \\ \text{i) } c = 0: \ \sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty \\ \text{ii) } c > 0: \ \sum b_n < \infty \Leftrightarrow \sum a_n < \infty \end{array}}$$

Recordar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(comprobar por L'Hôpital)

Luego:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}}_{} = \frac{1}{2} > 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n}}{\frac{1}{n^3}}$$

Ahora, notar que:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} < \infty$$

por criterio de la integral impropia, pues $f(x) = \frac{1}{x^3}$ es ≥ 0 y decreciente en $[1,\infty)$ y $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx < \infty$

(de la forma $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ con $\alpha = 3 > 1$).

Así, por criterio de comparación por cociente:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n} < \infty \quad \blacksquare$$

d) Criterio de la Raíz n-ésima:

Estudie la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$$

Sol:

Criterio de la Raíz n-ésima

Si $(a_n) \geq 0$ y $r = \limsup_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} \in \mathbb{R}$

(el límite más grande posible de una subsucesión, coincide con el límite cuando este último existe), entonces:

i) $r < 1 \implies \sum a_n < \infty$

ii) $r > 1 \vee r = \infty \implies \sum a_n = \infty$

Notar que:

$$a_n := \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} \geq 0. \text{ Además:}$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)}{n+2}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{(-1)}{n+2}\right)^{n+2}}_{\to e^{-1}}\underbrace{\left(1+\frac{(-1)}{n+2}\right)^{-2}}_{\to 1}$$

$$= \frac{1}{e} < 1$$

Luego por criterio de la raíz n-ésima:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} < \infty \; ■$$

Series de Potencias

Serie de la forma: $\sum_{n=i}^{\infty} a_n x^n$
para $x \in \mathbb{R}$.

- $R = \sup\{x : \sum a_n x^n < \infty\}$ (radio de convergencia)

$$= \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1} = \left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1}$$

criterio de la raíz n-ésima — criterio del cociente

- Si R es el radio de convergencia, entonces el intervalo de convergencia I cumple que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$, donde $\forall x \in I$, $\sum a_n x^n < \infty$
(ojo, esto dice que cualquier $x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < R$ da una serie convergente, y solo hay que comprobar qué sucede cuando $|x| = R$).

- Se define para $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{n=i}^{\infty} a_n x^n$$

f es continua, infinitamente diferenciable e integrable. Más aún, las integrales y derivadas son término a término ("entran" a la serie).

- $f(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$.

e) $$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^{n+2}$$

$$= \sum_{n\geq 2} \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{a_n} x^n$$

1) Calcule el radio de convergencia y entregue el intervalo de convergencia, estudiando qué ocurre en los extremos.

Sol: Radio de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n}(n+1)} \cdot \cancel{n}(n-1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$$

$$\Rightarrow R = 1.$$

Así, el intervalo de convergencia I incluye a $(-R, R) = (-1, 1)$.

Para ver qué pasa en $x=1$, estudiemos el criterio de comparación:

> Criterio de comparación
>
> Si $(a_n), (b_n) \geq 0$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists \alpha > 0$ tq $a_n \leq \alpha b_n$, $\forall n \geq n_0$, entonces:
>
> $$\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$$

Si $x = 1$, la serie queda:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$$

Notar que:

$$a_n := \frac{1}{n(n-1)}, \quad b_n := \frac{1}{(n-1)^2} \geq 0$$

y $$a_n = \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)\cdot(n-1)} = \frac{1}{(n-1)^2} = b_n$$

Luego, como $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)^2} < \infty$ (por criterio de la integral impropia, pues $f(x) := \frac{1}{(x-1)^2} \geq 0$, es decreciente y

$$\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \underset{\substack{\text{c.v.}: u = x-1 \\ du = dx \\ x=2 \to u=1 \\ x=\infty \to u=\infty}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{u^2}\,du < \infty$$

$$\left(\int_1^\infty \frac{1}{u^\alpha}\,du < \infty, \forall \alpha > 1\right)$$

)

entonces por criterio de comparación:

$$F(1) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} < \infty$$

Ahora, para ver qué pasa en $x = -1$, estudiemos el criterio de Leibniz:

> Criterio de Leibniz:
>
> Si $(a_n) \geq 0$ y $a_n \to 0$ entonces $\sum (-1)^n a_n < \infty$.

Notar que la serie queda:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$$

Aquí, $a_n := \frac{1}{n(n-1)} \geq 0$ y converge a 0, luego por criterio de Leibniz se tiene que:

$$F(-1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} < \infty$$

$\therefore I = [-1, 1]$ es el intervalo de convergencia ∎

2) Calcule $f'(x)$, $f''(x)$, $f'(0)$, $f(0)$.

Sol $f(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$, $f(0) = 0$.

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{\cancel{n} x^{n-1}}{\cancel{n}(n-1)} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$$

$$\Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\Rightarrow f''(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$$

3) Identifique $F''(x)$ como una serie geométrica e integre para encontrar explícitamente la función F.

Sol: $F''(x) = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$

si $|x|<1$
(serie geométrica)

$$\underset{\int dx}{\Longrightarrow} F'(x) = \int \frac{1}{1-x}\, dx + C \underset{\substack{\text{C.V.} \\ u=1-x \\ du=-dx}}{=} -\int \frac{1}{u}\, du + C$$

$$= -\ln(u) + C = -\ln(1-x) + C$$

Pero $0 = F'(0) = -\ln|1-0| + C = C$

$$\underset{(C=0)}{\Longrightarrow} F'(x) = -\ln(1-x)$$

$$\underset{\int dx}{\Longrightarrow} F(x) = -\int \ln(1-x)\, dx + \tilde{C}$$

$$\underset{\substack{\text{C.V. } u=1-x \\ du=-dx}}{=} \int \ln(u)\, du + \tilde{C}$$

$$= u\ln(u) - u + \tilde{C}$$

primitiva del ln
(por partes)

$$= (1-x)\ln(1-x) - (1-x) + \tilde{C}$$

Pero $0 = F(0) = \cancel{(1-0)\ln(1-0)} - (1-0) + \tilde{C}$, con $\ln(1-0) \to 0$

$$\Rightarrow \tilde{C} = 1$$

Así:

$$F(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$$

4) Calcule el valor de la serie numérica:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$$

Sol: Sabemos del principio y de iii) que:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

$$= x + (1-x)\ln(1-x)$$

$$\underset{(-1\in I)}{\Longrightarrow} f(-1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

$$= (-1) + (1-(-1))\ln(1-(-1))$$

$$\Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = -1 + 2\ln(2)$$

$\sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n\ln(\ln(n))}}_{f(n)}$

Criterio de la integral impropia (13 f)

Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ función decreciente

Se tiene $\sum_{n \geq 1} f(n) < +\infty$ (finita) $\Leftrightarrow \int^{+\infty} f(x) < +\infty$

Entonces estudiamos

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(\ln(x)))}$$

$u = \ln(x) \quad du = \frac{1}{x}dx$

$x = 3 \Rightarrow u = \ln(3)$

$x = +\infty \Rightarrow u = +\infty$

otro c.v

$x = e^u \Rightarrow dx = e^u du$

$x = 3 \Rightarrow \ln(3) = u$

$x = +\infty \Rightarrow u = +\infty$

$$\int_{\ln(3)}^{\infty} \frac{e^u du}{e^u(\ln(u))}$$

$$= \int_{\ln(3)}^{\infty} \frac{\cancel{e^u} du}{\cancel{e^u}\ln(u)} = \int_{\ln(3)}^{\infty} \frac{du}{\ln(u)}$$

semana pa les que no cacharon

(Week 11 Ma 1001 18 f)

$1 - \frac{1}{x} < \ln(x) < x - 1 < x$ (desigualdad fundamental)

1 2 3 4

Si: 2 < 4

$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\ln(x)}$

Luego $\displaystyle\int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{du}{\ln(u)} > \underbrace{\int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{1}{u}\,du}_{\text{la más pequeña Explota}}$

$\Rightarrow$ la más grande Explota!

Luego como $\displaystyle\int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{du}{\ln(u)}$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(\ln(n))}$ se diverge

- $\sum_{k=}(-1)\sqrt{\frac{k}{k+1}}$

absoluta
$\Rightarrow$ condición

Veamos $\sum_{k=0}^{+\infty}\left|(-1)^k\sqrt{\frac{k}{k^2+1}}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty}\sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$

Sea $a_k = \sqrt{\frac{k}{k^2+1}}$ y $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow$ Converge

Veamos cociente $\lim_{\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{k}{k^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{k}}}$

$= \lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}} \rightarrow 1 > 0$

Luego $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = +\infty$ (diverge)

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{k}{k^2+1}} = +\infty$

$$\cdot \sum_{K=0}^{+\infty} (-1) \sqrt{\frac{K}{K^2+1}} \to \text{Es decreciente}$$

criterio signo de la derivada

$$\left(\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \left(\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{-x^2+1}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \cdot \frac{1}{(x^2+1)}$$

Es negativo para $x \to +\infty$

Si a_n decreciente y $a_n \to 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n < +\infty$$

Leibnitz Si a_n sucesión decreciente y convergente a 0 (luego a_n no negativa) $\Rightarrow \sum (-1) a_n$ converge (139)

además $\lim_{K \to \infty} \sqrt{\frac{K}{K^2+1}} = 0$ luego por Leibnitz

$$\sum_{K=1}^{+\infty} (-1)^K \sqrt{\frac{K}{K^2+1}} < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln(n)}$$

$$\ln(n) < n - 1$$

$$\ln(n) + 1 < n$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)+1}$$

Luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\ln(n)} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^1}$, con $p \leq 1$ diverge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+\ln(n)} \text{ diverge} //$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \qquad a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} > 0$$

$$b_n = \frac{1}{n^{3/2}} > 0$$

Luego $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1$

Luego $\displaystyle \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$, $p>1$ converge

$p = \frac{3}{2} > 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} < +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{(2n-1)\,3^n\, n!}$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

Si: $r < 1 \Rightarrow \sum a_n < +\infty$

$r > 1 \vee r = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

$r = 1$ ni idea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{(2n-1)\,3^n\, n!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7 \ldots 2n+1}{(2n-1)\,3^n\, n!}$$

$$a_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{(2n-1)\,3^n\, n!} \qquad a_{n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n+1}(2k+1)}{(2n+1)\,3^{n+1}\,(n+1)!}$$

Criterio Cociente

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right)}(2n+3)}{(2n+1)\,\cancel{3^n}\cdot 3\,\cancel{n!}\,(n+1)} \cdot \frac{(2n-1)\,\cancel{3^n}\,\cancel{n!}}{\cancel{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\right)}}$$

$$= \frac{4n^2+4n-3}{6n^2+9n+3} \to \frac{2}{3} < 1$$

Luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{(2n-1)\,3^n\, n!} < +\infty$

• $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx < \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\displaystyle = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 0$ //

$\Rightarrow$ Luego $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx$ converge

Ya que converge, por $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx < \frac{\pi}{2}$

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x}\,dx$

$u = e^x$
$du = e^x\,dx$
$\dfrac{du}{u} = dx$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \cdot e^{-e^x}\,dx$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u \cdot e^{-u} \cdot \frac{du}{u} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u}\,du$ pues e^{-u} converge

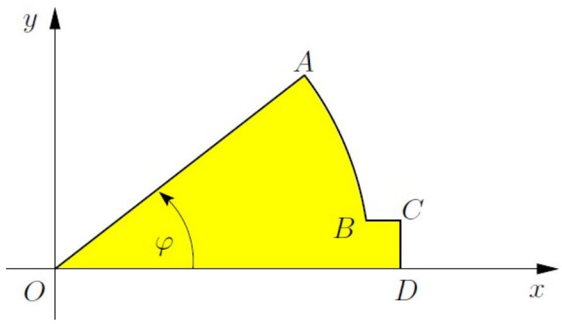
$\displaystyle = -e^{-u}\Big|_{-\infty}^{\infty} = -\cancel{e^{-\infty}}^{\,0} + \cancel{e^{-\infty}}^{\,0}$

MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Auxiliares: Vicente Salinas &
Marcelo Navarro

Soluciones Guia Control 3

A darlo vuelta

P1. Un trompo se genera por la rotación en torno al eje OX de la curva $OABCD$ mostrada en la figura



OA: es un trazo recto inclinado en un ángulo φ,

AB: es un arco de circunferencia de radio R y centro en O,

BC: es un trazo horizontal,

CD: es un trazo vertical *de largo 1*, ubicado en $x = R + 1$.

a) Escriba, en términos de R y φ, las ecuaciones de las funciones que definen los tramos OA, AB y BC de la curva y encuentre las coordenadas de los puntos A,B y C.

b) Encuentre el área total de la superficie exterior del trompo.

Solución:

a)
- OA esta definido por $y = tan(\varphi)x$
- AB esta definido por $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$
- BC esta definido por $y = 1$
- $A = (Rcos(\varphi), Rsen(\varphi))$, $B = (\sqrt{R^2-1}, 1)$, $C = (R+1, 1)$

Por lo que el trompo se modela como:

$$f(x) = \begin{cases} tan(\varphi)x & si \quad x \in [0, Rcos(\varphi)] \\ \sqrt{R^2 - x^2} & si \quad x \in [Rcos(\varphi), \sqrt{R^2-1}] \\ 1 & si \quad x \in [\sqrt{R^2-1}, R+1] \end{cases}$$

b) La superficie total, S es igual a la siguiente expresión

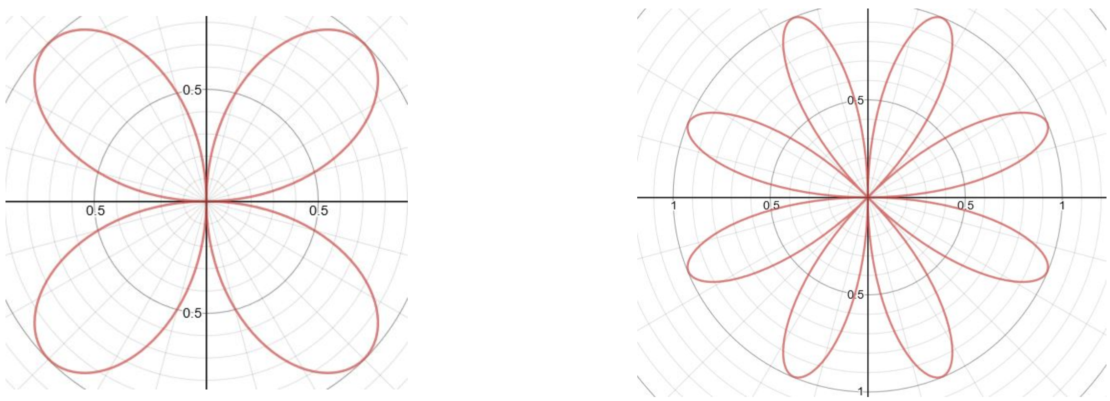
$$S = 2\pi \int_0^{Rcos(\varphi)} (tan(\varphi)x)\sqrt{1 + ((tan(\varphi)x)')^2}dx + 2\pi \int_{Rcos(\varphi)}^{\sqrt{R^2-1}} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + ((\sqrt{R^2-x^2})')^2}dx$$
$$+2\pi \int_{\sqrt{R^2-1}}^{R+1} 1\sqrt{1 + (1')^2}dx + \pi \cdot 1^2$$

Donde la $\pi \cdot 1^2$ representa la tapa circular que se forma al rotar el segment CD

P2. Probar que el área encerrada por los 2n lazos de $r = a\sin(n\theta)$, con n par es independiente de n. ¿Que sucede para el caso de n impar?

Solución:

Notemos que si n es par, entonces la curva polar $r = asin(n\theta)$ forma $2n$ pétalos o lazos



(a) $n = 2$ (b) $n = 4$

Figura 1: Ejemplos para $n = 2$ y $n = 4$

Ahora calculemos el área de un pétalo y luego multiplicamos por los $2n$ que hay. Para esto basta notar que en $\theta = 0$ se tiene que $r = 0$, y para $\theta = \frac{\pi}{n}$ se tiene, igualmente, que $r = 0$ por lo que aquí es cuando se forma un pétalo. Luego

$$A = 2n \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} (asen(\theta))^2 d\theta = n\int_0^{\frac{\pi}{n}} a^2 sen^2(\theta)d\theta = \frac{na^2}{2} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\pi a^2}{2}$$

Lo cual no depende de n.

Por otro lado si n es impar, voy a tener la mitad de pétalos que conseguía cuando n era par. Entonces

$$A_{impar} = \frac{A_{par}}{2}$$

P3. Calcular el área de la región fuera del cardioide $\rho = 2(1 - \cos(\phi))$ y dentro del círculo $\rho = -6\cos(\phi)$.

Solución: La pauta esta en el control 2014-3 de Uribe

P4. Sea $a > 0$ considere la región limitada por los ejes y el arco de circunferencia de centro (a, a) y radio a.

a) Calcule el área de la región.

Solución: Para calcular el área de la región primero es necesario parametrizar el circulo de centro (a, a) y radio a:
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2 \Rightarrow y = a - \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$, se escoge el valor negativo de la raíz pues nos interesa el semicírculo inferior.
Los limites de x estarán dados por los valores en los que intercepta a los ejes, los cuales son: $x = 0$ y $x = a$. Por lo tanto el área es:
$A = \int_0^a y dx = \int_0^a a - \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx$, esta integral entrega como resultado: $a^2 - \frac{\pi a^2}{4}$
(el cambio conveniente es $(x - a) = a\sin(u)$).
Observación: Notar que también se pudo haber calculado el área como la de un cuadrado de largo a menos la de un cuarto de círculo de radio a.

b) Calcule el centro de gravedad de la región

Indicación: Puede serle útil recordar :$X_G = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} \wedge Y_G = \frac{\int_a^b \frac{f(x)^2}{2}dx}{\int_a^b f(x)dx}$

Solución:

Para calcular las coordenadas del centro de gravedad notamos que faltan: $\int_a^b \frac{f(x)^2}{2}dx$ y $\int_a^b xf(x)dx$.

$$\int_a^b \frac{f(x)^2}{2}dx = \int_0^a \frac{a^2 - 2a\sqrt{a^2-(x-a)^2} + a^2 - (x-a)^2}{2}dx = a^3 - \frac{\pi a^3}{4} - \frac{a^3}{6} = a^3\left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Para el caso de la otra integral se tiene que:

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_0^a ax - x\sqrt{a^2-(x-a)^2}dx = \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{\pi a^3}{4}$$

Por lo tanto al reemplazar:

$$X_G = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{\frac{a^3(10-3\pi)}{12}}{\frac{a^2(4-\pi)}{4}} = \frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)} \wedge Y_G = \frac{\int_a^b \frac{f(x)^2}{2}dx}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{\frac{a^3(10-3\pi)}{12}}{\frac{a^2(4-\pi)}{4}} = \frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)}$$

Asi que el centro de gravedad es $\left(\frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)}, \frac{a(10-3\pi)}{3(4-\pi)}\right)$

P5. Sea $n \geq 1$ encuentre el centroide de la región entre $f(x) = x^n$ y la recta $x = 1$. Muestre que sucede si $n \to \infty$

Solución:

Las coordenadas del centro de masa son

$$X_G = \frac{\displaystyle\int_0^1 x \cdot x^n dx}{\displaystyle\int_0^1 x^n dx} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$Y_G = \frac{\displaystyle\int_0^1 \cdot x^2 n dx}{2\displaystyle\int_0^1 x^n dx} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2}{n+1}} = \frac{n+1}{4n+2}$$

Cuando $n \to \infty$ el centroide converge a $(1, \frac{1}{4})$

P6. Considere las funciones $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas para $x \in [0, \pi]$. Se define la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi],\ y \in [f(x), g(x)]\}$

a) Demuestre que $\forall x \in [0, \pi]$, $g(x) \geq f(x)$.

b) Calcule el área de la región R.

c) Encuentre la posición del centro de gravedad de la región R

d) Determine el perimetro de la región R.

Solución

a) Para probar que $g(x) \geq f(x)$, se define la función auxiliar $h(x) = g(x) - f(x)$ que es derivable, y aqui se prueba que $h(x) > 0$ (que es analogo a lo que se quiere probar). Notemos que $h(0) = h(\pi) = 0$ si probamos mediante crecimientos que h empieza a crecer desde $x = 0$ y se mantiene positivo sobre el eje x ganamos. Para esto veamos su crecimiento.

$$h'(x) = \pi - 2x - cos(x),\ x \in [0, \pi]$$

Mediante inspección (cachativa) nos damos cuenta que $h'(\frac{\pi}{2}) = 0$ y es el unico punto critico ya que $-2x$ es estrictamente decreciente (por lo que no vuelve a subir ni a pasar por otro punto de altura similar). Luego notamos que $h''(x) = -2 + sen(x) < 0$ por lo tanto h es cóncava, lo que vuelve a $\frac{\pi}{2}$ es un máximo local. por lo que se cumple que
$h(x)$ es creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$ y es decreciente en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ por lo que necesariamente $h(x) \geq 0$ lo que equivale a que $g(x) \geq f(x), x \in [0, \pi]$

b) El área de la región es simplemente el area bajo la curva de $g(x)$ menos el área bajo la curva de $f(x)$ (esto debido a que $g(x)$ es más grande).

$$A_R = \int_0^{\pi} (g(x) - f(x)) dx = \int_0^{\pi} (\pi x - x^2 - sen(x)) dx = \left(\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + cos(x) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{6} - 2$$

c) El centro de gravedad de R se calcula como:

$$X_G = \frac{\displaystyle\int_0^\pi x\,(g(x) - f(x))\,dx}{A_R} \qquad Y_G = \frac{\displaystyle\int_0^\pi \left(g^2(x) - f^2(x)\right)dx}{A_R}$$

d) El perimetro se calcula como

$$\begin{aligned} P &= L(g) + L(f) \\ &= \int_0^\pi \sqrt{1 + (g'(x))^2}dx + \int_0^\pi \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \end{aligned}$$

P7. Sea $P, Q \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización arbitraria de una curva Γ con $\vec{r}(a) = P$ y $\vec{r}(b) = Q$. Probar que $L(\Gamma) \geq \|v\|$, donde $v = Q - P$, es decir el segmento entre P y Q entrega el menor camino posible. Para esto siga los siguientes pasos:

a) Considere la integral $\displaystyle\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt$ y calcule su valor.

b) Concluya utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz $u \cdot v \leq \|u\|\|v\|$

Solución:

a) Consideremos $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ donde $r_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $v_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$. Entonces

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v = \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \\ r_3'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = r_1'(t)v_1 + r_2'(t)v_2 + r_3'(t)v_3$$

Luego, ocupando que $\vec{r}(a) = P$ y $\vec{r}(b) = Q$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt &= \int_a^b (r_1'(t)v_1 + r_2'(t)v_2 + r_3'(t)v_3)dt \\ &= \int_a^b r_1'(t)v_1 dt + \int_a^b r_2'(t)v_2 dt + \int_a^b r_3'(t)v_3 dt \\ &= v_1 \int_a^b r_1'(t)dt + v_2 \int_a^b r_2'(t)dt + v_3 \int_a^b r_3'(t)dt \\ &= v_1 \cdot (r_1(b) - r_1(a)) + v_2 \cdot (r_2(b) - r_2(a)) + v_3 \cdot (r_3(b) - r_3(a)) \\ &= v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + v_3 \cdot v_3 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ &= \|v\|^2 \end{aligned}$$

b) Consideremos nuevamente la integral $\displaystyle\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt$ Usaremos Cauchy-Schwarz sobre $\displaystyle\frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt &\leq \int_a^b \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\| \cdot \|v\| dt \\ &= \|v\| \int_a^b \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right\| dt \\ &= \|v\| \cdot L(\Gamma) \end{aligned}$$

Ocupando el resultado de a) se tiene que

$$\int_a^b \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \cdot v dt = \|v\|^2 \leq \|v\| \cdot L(\Gamma)$$

Tomando la ultima desigualdad y pasando diviendo $\|v\|$, se concluye que

$$\|v\| \leq L(\Gamma)$$

P8. Escribir la ecuación paramétrica del lugar geométrico constituido por todos los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (tal que $dist(F_1, F_2) = 2a$) es una magnitud constante igual a a^2, con $a > 0$. Utilice coordenadas polares.

Solución

Sea (x, y) un punto de la curva, sin perdida de generalidad el punto F_1 posee coordenadas $(-a, 0)$ y F_2 posee coordenadas $(a, 0)$ (por ejemplo pueden ser los focos de una elipse). Luego aplicando la condición

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2$$

elevamos al cuadrado y con un poco de algebra obtenemos que

$$(x^2 + y^2 + a^2 + 2ax)(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax) = a^4$$

Lo ultimo es una suma por diferencia

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$

Aqui aplicamos polares, recordando que $x^2 + y^2 = r^2$ y $x = rcos(\theta)$

$$(r^2 + a^2)^2 - 4a^2r^2cos^2(\theta) = a^4$$

De aqui despejando r, considerando que $r > 0$, se obtiene que $r = \sqrt{2acos(\theta)}$. Luego parametrizando se tiene que

$$\vec{r}(\theta) = (rcos(\theta), rsen(\theta)) = (\sqrt{2acos(\theta)} \cdot cos(\theta), \sqrt{2acos(\theta)} \cdot sen(\theta))$$

P9. [P2 a) Examen Recuperativo 2010-2]

Considere la curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \left(\int_0^t cos\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du, \int_0^t sen\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du \right) \qquad t \in [0, \infty)$$

Donde c es una constante positiva. Encuentre

a) $\hat{T}(t), \hat{N}(t)$, $\hat{B}(t)$ y su $\kappa(t)$

b) De un argumento geométrico de porque la torsión es 0 y corrobore esto mediante el calculo según su respectiva formula.

P10. Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies:

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ y } (z - x)(z + x) = y^2$$

a) Encuentre una parametrización de Γ. $(a > 0)$

Solución: Falto agregar al enunciado $z > 0$. Notar que $(z - x)(z + x) = y^2 \iff z^2 = x^2 + y^2$ y al interceptar las dos ecuaciones se tiene que:

$z^2 = a^2 \Rightarrow z = a$ y como $x^2 + y^2$ puede para metrizarse facilmente con *cos* y *sin* se tiene que:

$\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), a)$.

b) Calcule el centro de masa dada por $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Solución:
Por lo tanto $\rho(\vec{r}(t)) = 3(cos(t) + sin(t)) + a$.

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = (-3\sin(t), 3\cos(t)) + 0)$.

$\left|\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = 1$

$M = \displaystyle\int_0^{2\pi} \rho(\vec{r}(t)) \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| dt = \int_0^{2\pi} (3\cos(t) + 3\sin(t) + a)dt = 2a\pi a$

Ahora para sacar el centro de masa se debe usar la fórmula:

$x_g = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_\Gamma x\rho dl \wedge y_g = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho dl \wedge z_g = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho dl$

El resultado es $(\dfrac{9}{2a}, \dfrac{9}{2a}, a)$

P11. Encontrar todas las funciones $f(t)$ tales que la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (e^t, f(t), \lambda f(t))$, con $t \in \mathbb{R}$ y λ una constante real, sea una recta.

Solución: No hacerlo pifia vicho :C

P12. Sea una curva Γ que cumple con que existe un punto P_0 por el cual pasan todas las rectas normales de Γ. Se define $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)$, donde $\vec{\sigma}(s)$ es la parametrización en longitud de arco de Γ, $(\hat{N})(s)$ es el vector normal a Γ y ϕ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ con $\phi : [0, l_0] \to \mathbb{R}$. Demuestre que $\kappa(s) = 1$, $\tau(s)\phi(s) = 0$ y $\phi'(s) = 0$, donde $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son la curvatura y la torsión respectivamente. Concluya que Γ es una curva plana.

Indicación: Quizás le sea útil ocupar que $\hat{T}, \hat{N}$ y $\hat{B}$ son linealmente independientes.

Definición: (Independencia Lineal) *Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subseteq R^n$ diremos que estos vectores son linealmente independientes si $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i = 1, \ldots, m$*

Solución:

Consideremos la igualdad $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)$, Derivando a ambos lados se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_0}{ds} &= \frac{d}{ds}\left(\vec{\sigma}(s) + \phi(s)\hat{N}(s)\right) \\
\vec{0} &= \frac{d\vec{\sigma}}{ds}(s) + \phi'(s)\hat{N}(s) + \phi(s)\frac{d\hat{N}}{ds}(s) \\
\vec{0} &= \hat{T}(s) + \phi'(s)\hat{N}(s) - \kappa(s)\hat{T}(s) + \tau(s)\hat{B}(s) \qquad \textit{(Formula de Frenet)} \\
\vec{0} &= \underbrace{(1 - \kappa(s)\phi(s))}_{\lambda_1}\hat{T}(s) + \underbrace{\phi'(s)}_{\lambda_2}\hat{N}(s) + \underbrace{\phi(s)\tau(s)}_{\lambda_3}\hat{B}(s)
\end{aligned}
$$

De lo anterior, notando que $\kappa(s), \phi(s), \phi'(s)$ y $\tau(s)$ son funciones en los reales, podemos aplicar la independencia lineal de $\hat{T}, \hat{N}$ y $\hat{B}$.

Por lo que se obtiene las siguientes igualdades

$$
\begin{array}{cclclcl}
1 - \kappa(s)\phi(s) & = 0 & \Rightarrow & \kappa(s)\phi(s) = 1 & \Rightarrow & \phi(s) \neq 0 \\
\phi'(s) & = 0 & \Rightarrow & \phi'(s) = cte \neq 0 & & \\
\phi(s)\tau(s) & = 0 & \Rightarrow & \tau(s) = 0 & \Rightarrow & \text{Curva Plana}
\end{array}
$$

Notar que en la primera igualdad, si $\phi(s) = 0$ entonces se tendria que $0 = 1$ lo que es una contradicción, por lo que $\phi(s) \neq 0$

P13. Se tiene una curva regular Γ en $\mathbb{R}^3$, parametrizada en longitud de arco por $\vec{r}(s)$, con curvatura $k(s)$ y torsión $\tau(s)$. Determinar la curvatura de $\dfrac{d\vec{r}(s)}{ds}$.

P14. Considere la curva Γ descrita por $\vec{r}(t) = f(t)(cos(t), sen(t))$ con $t \in [0, \infty)$. Donde f es de clase $\mathcal{C}^1$ y $0 \leq f(t) \leq 1, \forall t \geq 0$.

a) Muestre que si $L(\Gamma)$ es finito y f decreciente, entonces $f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$

b) Muestre que si $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$, entonces $L(\Gamma)$ es infinito.

c) Si $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}$. ¿Es finito $L(\Gamma)$?

d) Caracterize (en terminos de existencia de integrales impropias) las funciones f tales que $L(\Gamma)$ es finito.

e) Use el resultado de la parte *d*) para mostrar que el resultado de la parte *a*) se mantiene aun sin la hipótesis de que f sea decreciente.

P15. Para las siguientes integrales impropias, identifique su tipo y si diverge o converge.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{sen^2(x)}{1+x^2}dx$

b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x+e^x}dx$

c) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x-e^{-x}}dx$

d) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tan(x)dx$

f) $\displaystyle\int_{1^-}^\infty \frac{4dx}{x^2\sqrt[4]{x^2-1}}$

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x}dx, \alpha > 0$

h) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{xln^2(x)} - \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$

Solución:

a) Converge

b) Converge

c) Diverge

d) Converge

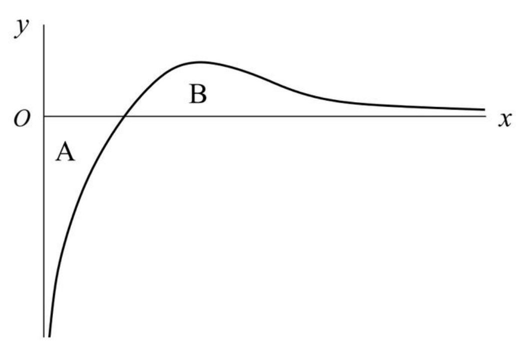
e) Diverge

f) Convege

g) Diverge

h) Converge

P16. Sea $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{ln(x)}{1+x^2}$ (ver figura). Porbar que las áreas de A y B son finitas e iguales. Indicación: para probar la igualdad, use el cambio de variables $y = 1/x$.



Solución: Malla vieja-¿Control 3-¿Control 6 2003 P1

P17. Determine la convergencia de $\displaystyle\int_{0^+}^\infty \frac{1}{xln^p(x)}dx$ según el valor de $p \in \mathbb{R}$

Haciendo el cambio de variable
$$u = ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$
tenemos que la integral a estudiar es equivalente a
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{u^p}$$

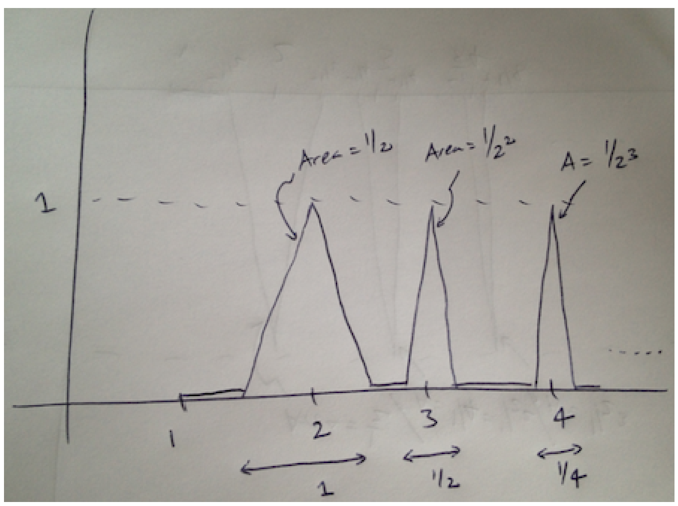
La cual es mixta, ya que hay infinitos en los limites de integración (esto lo hace ser de primera especie) y en $x = 0$ explota la función (esto lo hace ser de segunda especie). Por lo que separando para deshacer las integrales mixtas se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^p} = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} \frac{du}{u^p}}_{1^{era}} + \underbrace{\int_{a}^{0} \frac{du}{u^p}}_{2^{da}} + \underbrace{\int_{0}^{b} \frac{du}{u^p}}_{2^{da}} + \underbrace{\int_{b}^{\infty} \frac{du}{u^p}}_{1^{era}}$$

Y aquí necesitamos que las de primera especie cumplan que $p > 1$ para converger y necesitamos que las de segunda especie cumplan que $p < 1$, lo cual jamás pasará simultáneamente, por lo tanto se concluye que la integral diverge.

P18. Considere $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $\int_1^\infty f(x)dx$ existe. Demuestre o refute que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ¿Podria generalizar su resultado para $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$?

Basta considerar el siguiente contraejemplo



Es decir una función que tenga valor 0 y en cada número natural mayor o igual a 2, se levante un triangulo isoceles de altura 1 y base $(\frac{1}{2}^n)$. Es fácil darse cuenta que el limite de la función no existe debido a que en el infinito puedo estar en 0 o puedo ser la cúspide de un triangulo, es decir, puedo estar en 1. Y por otro lado

$$\int_1^\infty f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1$$

Donde en la ultima igualdad se calculo el limite a una suma geométrica.

En el caso general basta notar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to\infty} f(x) - \ell = 0$

Por lo que se refuta siempre.

P19. Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

a) Calcule, si existe, el área de la región bajo la curva en el primer cuadrante.

b) Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OX de la región anterior, existe (no lo calcule).

Solución: Ver pauta control 3-2011-2

P20. Para $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua se define la integral:

$$L(f) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)dx$$

a) Demostrar que si existen M y b reales tales que $\forall x \in [0,\infty)$, $|f(x)| \leq Me^{bx}$, entonces la integral $L(f)$ converge para todo $\alpha > b$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y tal que existen los reales de la parte anterior que acotan a $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$. Demostrar que para $\alpha > b$

$$L(f') = \alpha L(f) - f(0)$$

y con esto concluya que:

$$L(f'') = \alpha^2 L(f) - \alpha f(0) - f'(0)$$

c) Pruebe que para $\lambda \in \mathbb{R}$, $L(\lambda f) = \lambda L(f)$ y concluya que:

$$L(sen(\omega x)) = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Solución: Ver pauta control 3-2016-2

P21. Considere la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$

a) Demuestre que la integral es absolutamente convergente.

Solución: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx \leq \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \arctan(b) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto al estar acotada por una constante $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$ converge absolutamente.

b) Concluya que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$ también lo es.

Solución: Notar que la función $\dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$ es par y como la integral desde 0 a ∞ converge (si converge absolutamente, entonces converge) es valido decir que la de $-\infty$ a ∞ es dos veces esta (dos veces una que converge también converge).

Recordar que en caso de no converger no pueden usarse las propiedades de paridad en las integrales

P22. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x}\,dx$

Solución:

b) El cambio apañador es $u = e^x$ y el resultado es 1

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

Solución:

P23. El cambio apañador es $u = 2\tan x$ y el resultado es $\dfrac{\pi}{2}$

P24. Sea f una función de clase C^2 en $[0,1]$, verificando que $f(0) = 0$. Demuestre que la integral:

$$\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}dx$$

Converge

Solución: Para demostrar esto se buscara aumentar el grado de x para que converja.

$$\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}dx = \lim_{a\to 0} f(x)(-2)x^{-\frac{1}{2}}\Big|_a^1 + 2\int_a^1 f'(x)x^{-\frac{1}{2}}dx = N + I$$

Si demostramos que N e I son números se demostrara que converge.

Partamos por N:

$N = \lim\limits_{a\to 0} f(1) - \dfrac{f(a)}{a^{\frac{1}{2}}} =^{L'H} f(1) - \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{f'(a)}{a^{-\frac{1}{2}}} = f(1) - \lim\limits_{a\to 0} f'(a)a^{\frac{1}{2}} = f(1) \Rightarrow$ N es un número.

Para no tener inconvenientes al acotar I demostraremos que I, converge absolutamente $2\int_a^1 \left|f'(x)x^{-\frac{1}{2}}\right| dx \leq 2\int_a^1 Mx^{-\frac{1}{2}}dx = 2M\int_a^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$, como f es de clase C^2 se tiene que f' es continua y por ende acotada entre [0,1].

Como se sabe que $\int_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha}dx$, converge para $\alpha < 1$, se tiene que para este caso converge y finalmente I es un número.

Por lo tanto $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^{-\frac{3}{2}}dx$ converge, pues su límite existe.