MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2021, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 11: -SUMAS-ÁREA

08 octaedro 2021

- Considere la región o área plana

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- **[Rotación eje *OX* - Método del disco]** Dada la región R el volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OX será:

$$V = \int_a^b A(x) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar volúmenes de cilindros o discos de altura infinitesimalmente pequeña, cuya formula es

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Donde cada disco tiene $r = f(x)$ y $h = dx$.

- **[Rotación eje *OY* - Método de la cáscara]** Dada la región R, le agregamos la restricción de que $0 \leq a < b$. El volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OY será:

$$V = \int_a^b A(x) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar cilindros huecos, los cuales se calculan de la siguiente forma.

Dada el área sin tapas del cilindro, que se denomina área superficial de formula

$$A_{superficial} = 2\pi r h$$

Si la multiplicamos por una profundidad infinitesimal dx, obtendremos el volumen de un cilindro hueco. Notamos que r es la distancia del eje de giro hasta el cilindro hueco.

Por lo que reconocemos como $r = x$ (si el eje de giro es el eje OY) y $h = f(x)$.

P1. Considere la función $f(x) = x^2\sqrt{2 - \cos(x^5)}$ Determine el volumen de la región formada al rotar la región encerrada entre 0 y 2 y la recta $y = 0$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. Sea $V(b)$ el volumen del sólido obtenido al rotar con respecto al eje x la región contenida entre la curva $y = x^{-3}$ y el eje x, desde $x = 1$ hasta $x = b$.
Analice el comportamiento de $V(b)$ a medida que $b \to \infty$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P3. Sea $f(x) = 2x - x^2$, dada su región sobre el eje X, calcule su área, para luego colocar una recta desde el origen hasta la función, de tal manera que el área sobre y bajo la recta sea la misma.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P4. Sea $\mathcal{D}$ la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+y^2=5$ y la parábola de ecuación $y=2(x-1)^2$ (región bajo la circunferencia y sobre la parábola)

I Determine el área de la región $\mathcal{D}$

II Determine el volumen generado por sólido revolución en torno al eje OX.

III Determine el volumen generado por sólido revolución en torno al eje OY.

1) Intuición:
2) Teoría:
3) Matraca:

IV Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Se define $G(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}(x-t)f(t)dt$. Demuestre que $G''(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

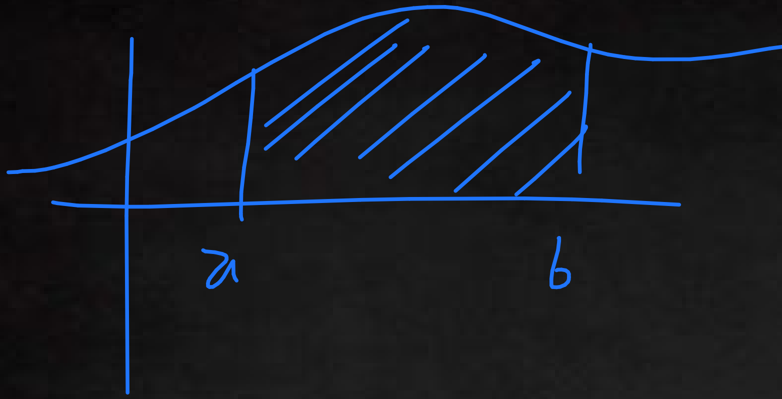
P5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Se define $G(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}(x-t)f(t)dt$. Demuestre que

$$G''(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$$

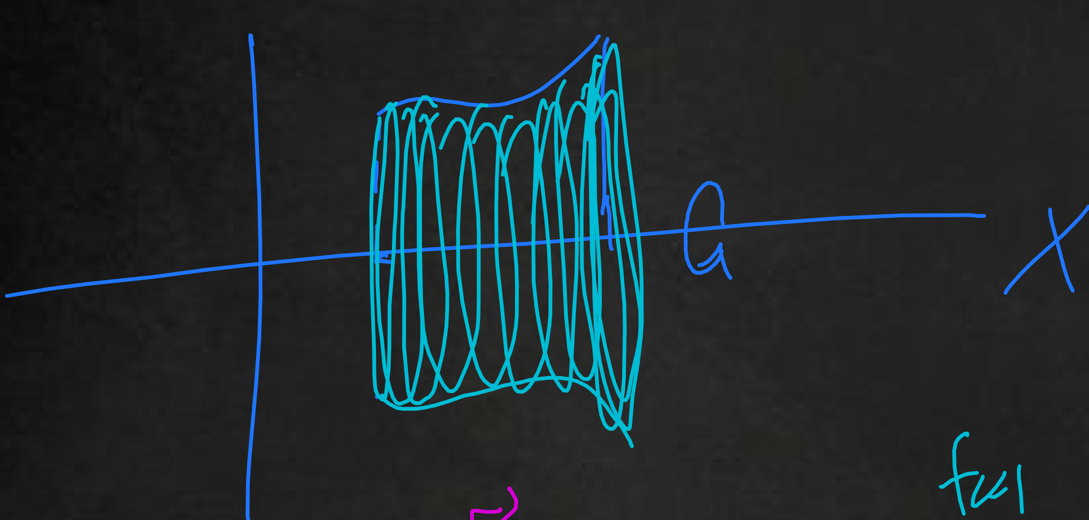
. ($\overline{Propuesto}$)

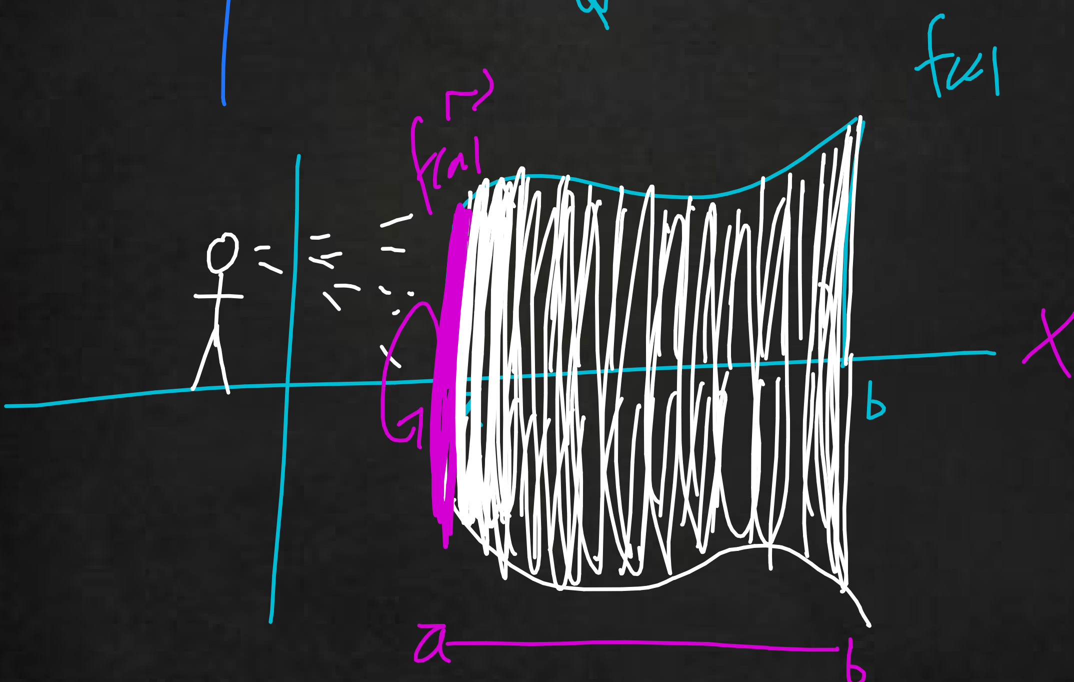
1. Intuición:
2. Teoría:
3. Matraca:

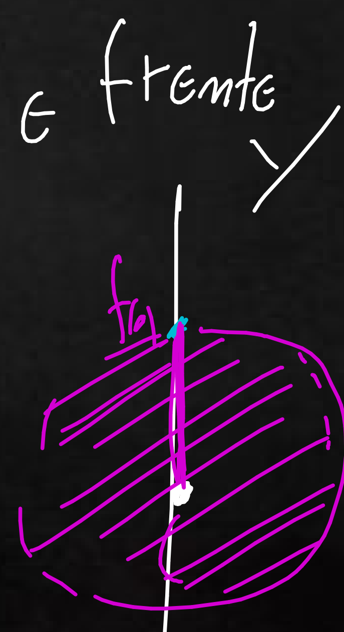
"No tengo frase, pero que les vaya bacan!"
Pato



¿Qué ocurre cuando gira en un eje?





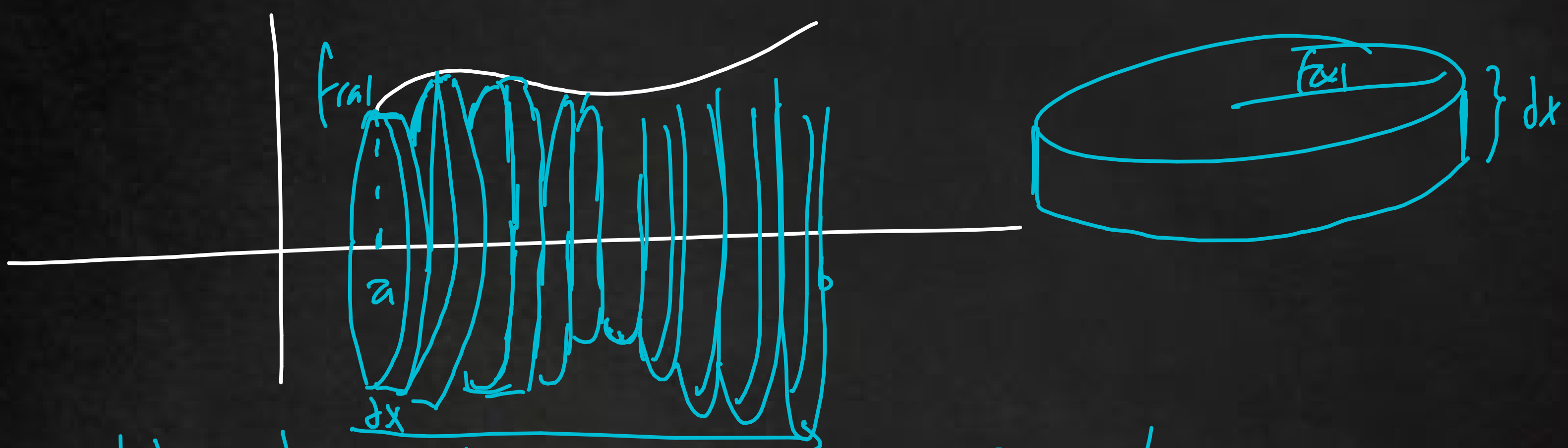


$$A'(\theta) = \pi r^2$$
$$\approx \pi f(x)^2$$

Rotación en el eje X
método del disco

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx$$

$$\simeq \pi r^2 h$$

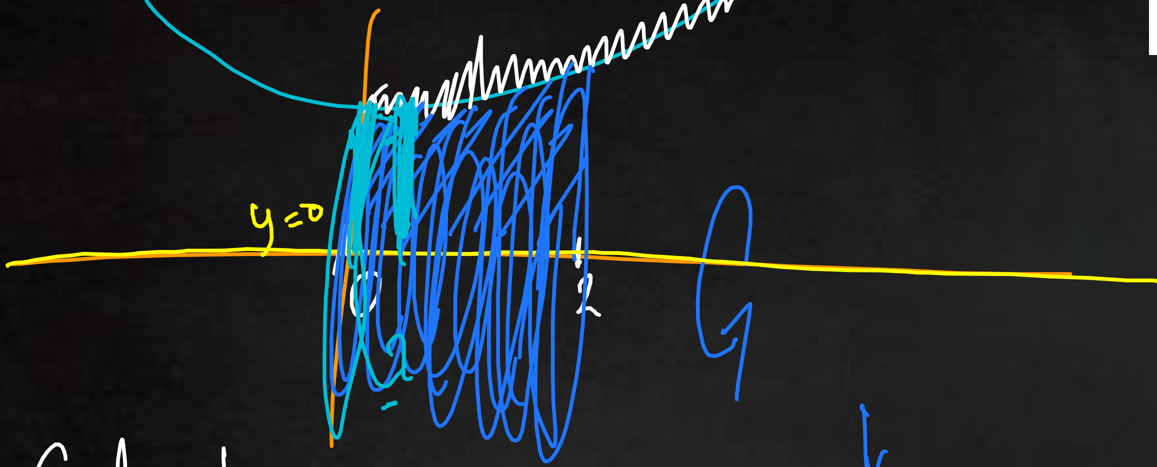


Método de los cáscaras (Rotar en eje y)

$$2\pi r h$$
$r \to x$, $h \to f(x)$

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\,dx$$

P1) $f(x) = x^2\sqrt{2-\cos(x^5)}$



Calcular

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_0^2 \pi f(x)^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left(x^2\left(\sqrt{2-\cos(x^5)}\right)\right)^2 dx = \pi\int_0^2 x^4(2-\cos(x^5))$$

$$= 2\pi\int_0^2 x^4 - \pi\int_0^2 x^4\cos(x^5)\,dx$$

yo puedo separar porque las integrales definidas existen dada la continuidad.

$$= 2\pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 - \frac{\pi}{5}\int_0^{32}\cos(u)\,du$$

No usar vaca pues tengo la forma $\cos(f(x))\,f'(x)$

$$= 2\pi\cdot\frac{32}{5} - \frac{\pi}{5}\,\text{sen}(u)\Big|_0^{32}$$

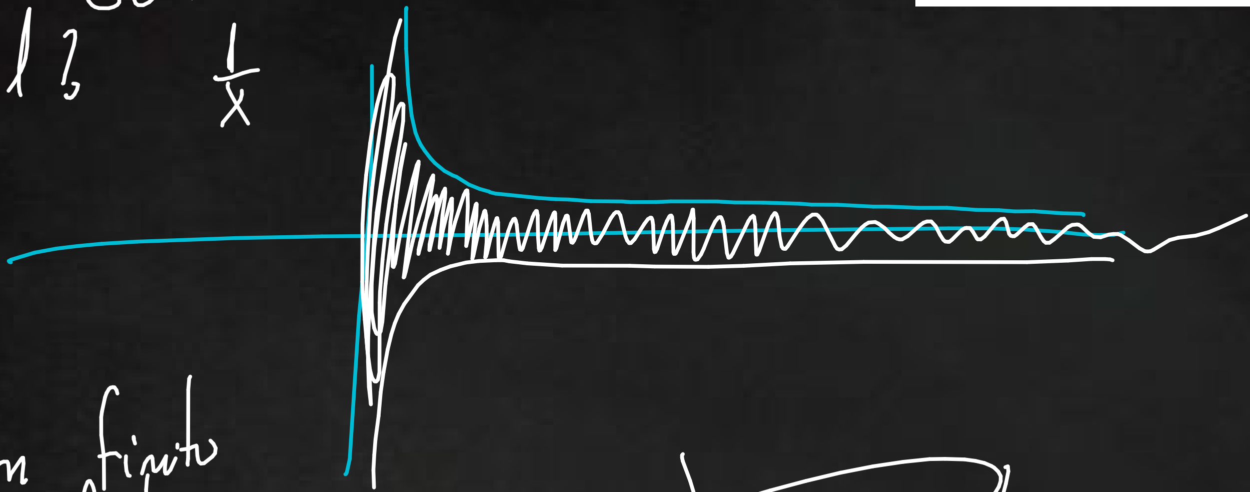
$$= \frac{64}{5}\pi - \frac{\pi}{5}\cdot\text{sen}(32) - \cancel{\frac{\pi}{5}\text{sen}(0)}$$

$$u = x^5 \qquad x=0 \Rightarrow u=0$$
$$du = 5x^4\,dx \qquad x=2 \Rightarrow u=32 = 2^5$$

$$= \frac{64}{5}\pi - \frac{\pi}{5}\,\text{sen}(32).$$

P2) Contexto

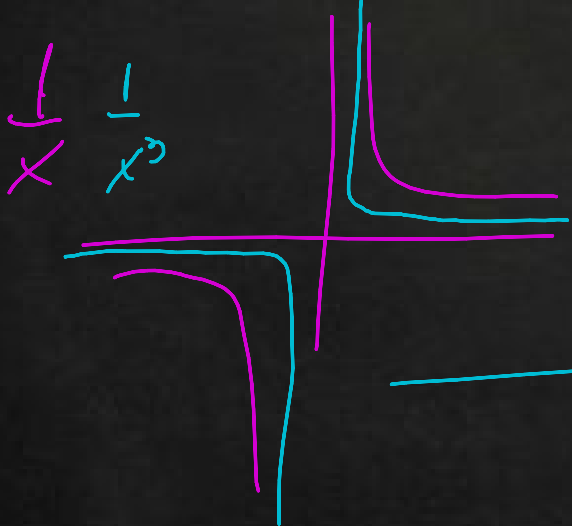
Como son los cuernos de gabriel?

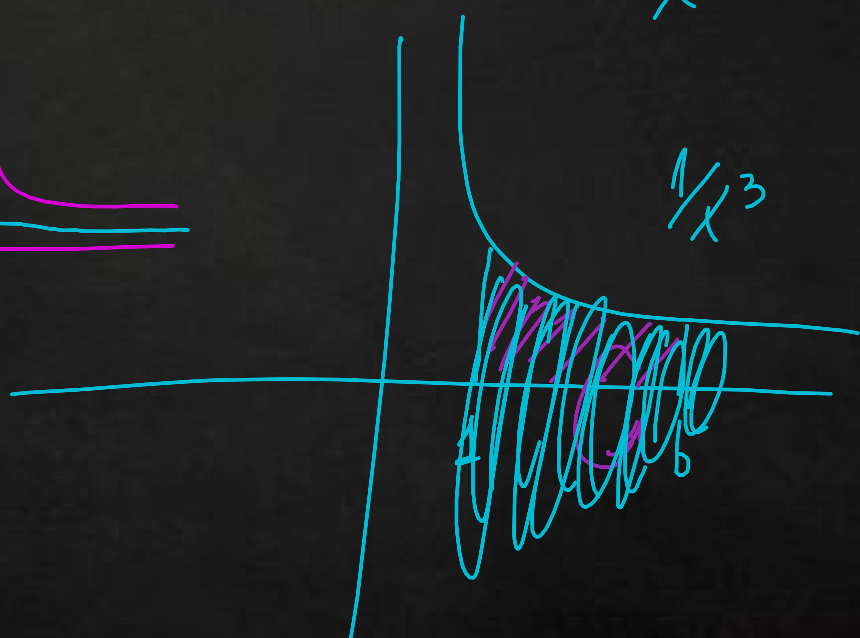


Volumen finito
Área infinita

tomar porque es lunes?

tomar la función $\frac{1}{x^3} = f(x)$





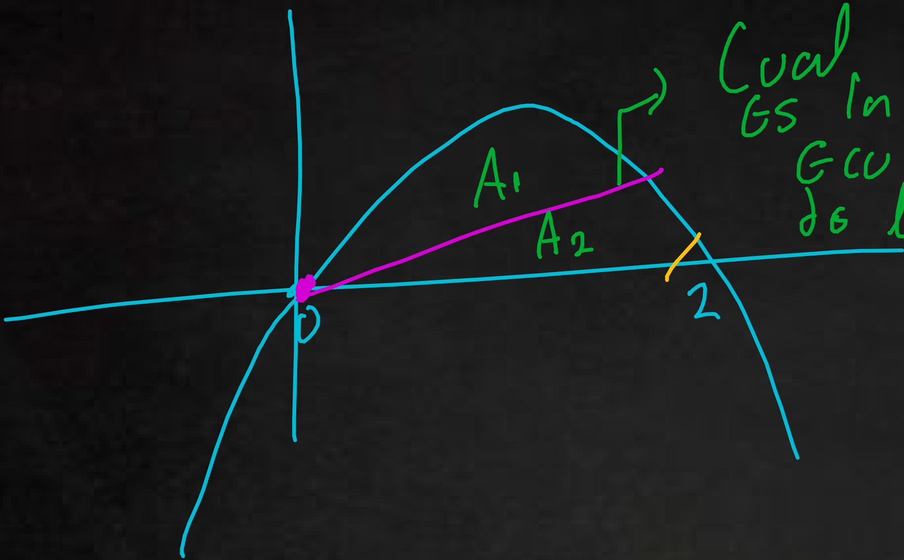
$$\int_1^b \pi\left(\frac{1}{x^3}\right)^2 dx = V(b)$$

$$\pi\int_1^b x^{-6}\,dx = \pi\left(\frac{x^{-5}}{-5}\right)\Bigg|_1^b$$

$$V(b) = \frac{\pi}{-5}\left(\frac{1}{b^5} - \frac{1}{1^5}\right) = \frac{\pi}{5}\left(1 - \cancel{\frac{1}{b^5}}^{\,0}\right)$$

$$\lim_{b\to\infty} V(b) = \frac{\pi}{5}$$

P3) $f(x) = 2x - x^2 = x(2-x)$



Cual es la ecuación de la recta

$A = A_1 + A_2$, $A_1 = A_2$

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx$$ (linealidad)

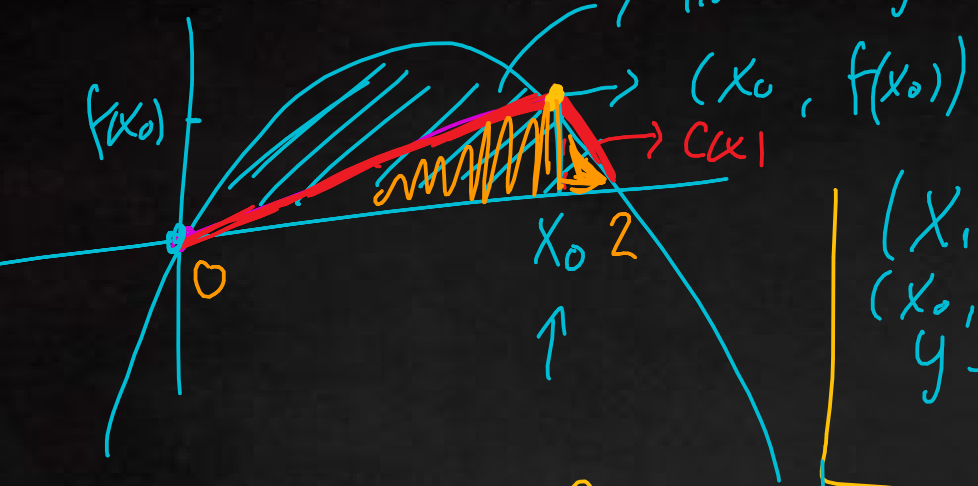
$$= 2\int_0^2 x\,dx - \int_0^2 x^2\,dx$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$$

$$= 2\left(\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right) - \frac{8}{3} + \frac{0}{3}$$

$$= 4\cdot\frac{3}{3} - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 = A_2 = \frac{2}{3} = \frac{4/3}{2}$$



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2)$

$(x_0, f(x_0)) \quad (0, 0)$

$$y - y_2 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_2)$$

Aditividad $a < b < c$

$$\int_a^c f(x) = \int_a^b f(x) + \int_b^c f(x)$$

La recta pasa $(0,0)$, $(x_0, f(x_0))$

$$y - 0 = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - 0}(x - 0)$$

$$y = \frac{f(x_0)}{x_0} \cdot x$$

$y = mx + n$

Impongo $\frac{2}{3} = \int_0^2 C(x)\,dx$

$$\frac{2}{3} = \int_0^{x_0} C(x)\,dx + \underbrace{\int_{x_0}^2 C(x)\,dx}$$

$$\frac{2}{3} = \int_0^{x_0} \frac{f(x_0)}{x_0} x\,dx + \int_{x_0}^2 (2x - x^2)\,dx$$

$$\frac{2}{3} = \frac{f(x_0)}{x_0}\frac{x_0^2}{2} + 2\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x_0}^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x_0}^2$$

$$\frac{2}{3} = f(x_0)\frac{x_0}{2} + 4 - x_0^2 - \frac{8}{3} + \frac{x_0^3}{3}$$

información $f(x_0) = 2x_0 - x_0^2$

$$\boxed{x_0 = \sqrt[3]{4}}$$

$$y = \frac{f(x_0)}{x_0} x = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4}} x$$