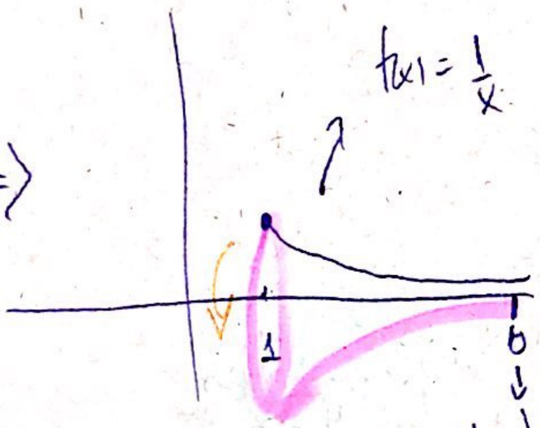
Estudio "Cuerno de Gabriel."

Veramos la función $f(x) = \frac{1}{x}$

pero en un dominio $[1, b]$, con la salvedad de ver $\lim_{b\to\infty}$ & $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow$



lo dejaré fijo y luego $b\to\infty$

1) Veamos su volumen de rotación respecto al eje X.

$$V = \pi \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \pi\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1}\right)$$

$$\lim_{b\to\infty} \Big/ = \pi\left(-\frac{1}{b} + 1\right) = \pi$$

Con lo que llegamos a que el volumen es finito!

Pág 110

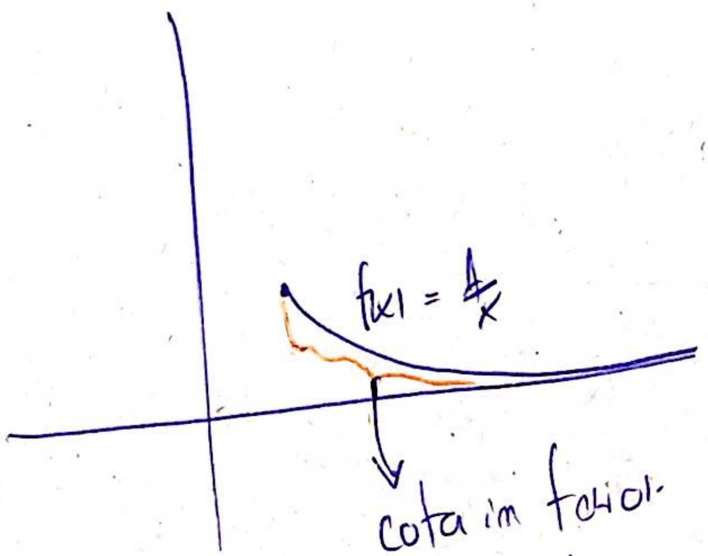
$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$

solido revolución eje X

2) Ahora veamos su superficie. (Manto)

$A = 2\pi \int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$ vemos que es una integral Impropia 1ra Especie

luego demostraremos que está acotada inferiormente por alguien que diverge, lo que implica que $\int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$



cota inferior que llamaré g(x)

Si g(x) explota $\lim_{b\to\infty}\int_1^b g(x)\,dx \Rightarrow \lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)\,dx$ (Explota)

diverge diverge

$$A = 2\pi \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx \geq 2\pi \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+0}\,dx$$ / como $\frac{1}{x^4} \geq 0$ $\forall x\in[1,b]$

Si no "sumo" $\frac{1}{x^4}$ entonces es menor.

$$= 2\pi \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1}\,dx$$

$$= 2\pi \lim_{b\to\infty} \ln(x)\Big|_1^b$$

$$= 2\pi\left[\cancel{\ln(b)}^{\,0} - \cancel{\ln(1)}^{\,0}\right]$$

$$= \infty$$

$\Rightarrow 2\pi \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx$ diverge $\Rightarrow 2\pi \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx = A$

lo que dice que su área es infinita y su volumen finito.

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = ?$$

Defimimos lo siguiente, Para un $\underline{n}$ fijo. SPG |||

$$\ln\left(\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$$

Propiedades log!

$$= \frac{1}{n}\left[\ln n! - \ln(n^n)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(n)\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \ln(n)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

Qué ocurre si tomamos Lim

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{|P|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_i)\cdot\boxed{\Delta x_i}$$

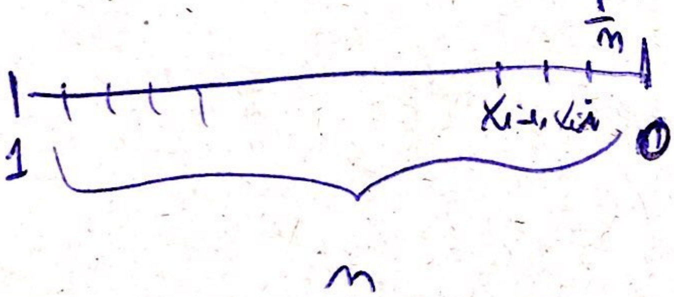
Veamos esto más en profundo

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$

equidistante

$f(\bar{x}_i) = M_i = \sup\{f(x), \forall x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$\ln(x)$



$\ln(x) \nearrow$ creciente

$\Rightarrow M_i = \ln(x_i)$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \int_0^1 \ln(x)\,dx \text{ Converge.}$$

Porqué?

$\int_0^1 \ln(x)\,dx$ segunda especie! luego

$$\int_a^b \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x\Big|_a^b = b\ln(b) - b - a\ln(a) + a$$

$b = 1 \quad a \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{a\to 0} 1\cdot\overset{0}{\ln(1)} - 1 - a\ln(a) - a = \lim_{a\to 0} -1 - \lim_{a\to 0} a\ln(a) - 0.$$

luego

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{1/x} \text{ "}= \frac{-\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\Rightarrow \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0 //$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln(x)\,dx = -1 = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m} \ln\left(\frac{k}{m}\right)\right] \Big/ e$$

$$\frac{1}{e} = \exp\left(\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m} \ln\left(\frac{k}{m}\right)\right]\right)$$

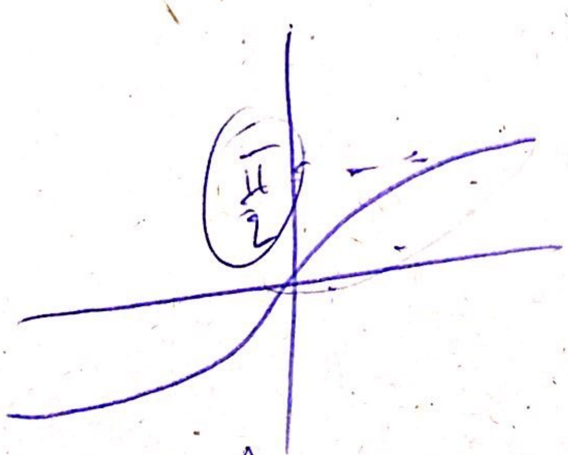
exp y $\ln(x)$ continuas $\Rightarrow$ intercambio lím

$$\frac{1}{e} = \cancel{\lim} \exp\left(\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\left[\sum_{k=1}^{m} \ln\left(\frac{k}{m}\right)\right]\right)$$

$$\frac{1}{e} = \exp \lim_{m\to\infty} \ln\left(\frac{m!}{m^m}\right)^{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty} \ln\left(\frac{m!}{m^m}\right)^{1/m} //$$

Estudiar:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^{3/2}}$$



achicándola

Mixta

$$= \underbrace{\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^{3/2}}}_{\substack{\text{2da especie} \\ 0 \text{ explota}}} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^{3/2}}}_{\substack{\text{1ra especie} \\ \text{dominio no acotado}}}$$

Cuando tenemos del tipo racional lo más sensato es criterio de comparación por cociente

$$\frac{1}{x^{\alpha}} \begin{cases} \text{1ra} & \alpha > 1 \text{ converge!} \\ & \alpha < 1 \text{ diverge} \\ \text{2da} & \alpha > 1 \text{ diverge!} \\ & \alpha < 1 \text{ converge!} \end{cases}$$

1) $\int_0^1 \frac{arctg(x)}{x^{3/2}} dx$ comparo com $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

Comparación! $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{arctg(x)}{x^{3/2}}}{\frac{1}{x^{1/2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{arctg(x)}{x} \overset{\text{" "}}{=} \frac{0}{0}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{arctg(x)}{x^{3/2}} dx$ converge pues $\frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha < 1$ converge.

2) $\int_1^\infty \frac{arctg(x)}{x^{3/2}} dx$ comparo com $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{arctg(x)}{x^{3/2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x \to \infty} arctg(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{arctg(x)}{x^{3/2}} dx$ converge! 1) $\wedge$ 2) $\Rightarrow \int_0^\infty arctg(x)/_{x^{3/2}} dx$ converge!

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl