MA1002-1/4 Cálculo Diferencial e Integral, Primavera 2021
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar : Extra C3

Fecha: 25/11/21

P1. Integrales Impropias

a) **Tercera Especie**
Considere la integral impropia mixta:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x + \sqrt{x + x^3}}$$

1) Separe la integral como la suma de dos integrales I_1, I_2 en los intervalos $(0, 1]$ y $[1, \infty]$, respectivamente, y pruebe que cada una converge.
2) Haga el cambio de variables $u = \frac{1}{x}$ en alguna de las dos integrales y pruebe que ambas son iguales. Justifique la convergencia de I.

b) **Convergencia Absoluta**
Estudie la convergencia de:

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

c) **Definición**

P2. Intro

Demuestre que $\lim\limits_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi$, pero que sin embargo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$ diverge.

a)

P3. Considere la función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x\sqrt{2-x}$ y definamos la región

$$\mathcal{R} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le f(x)\right\}$$

a) Calcule $A(\mathcal{R})$, el área de la región $\mathcal{R}$
b) Calcule $V_{OX}(\mathcal{R})$, el volumen de revolución generado al rotar $\mathcal{R}$ con respecto al eje X
c) Calcule V_{OY}, el volumen de revolución generado al rotar $\mathcal{R}$ con respecto al eje Y

P4. Demuestre que para $a > 0$ se tiene que

$$\int_0^a x f\left(\frac{x}{a}\right) dx = a^2 \int_0^1 x f(x) dx$$

Use este resultado para calcular $\int_0^a x (\ln x - \ln a)\, dx$, con $a > 0$.

P5. Analice la convergencia de las siguientes integrales, usando las reglas de convergencia o criterios adecuados.

a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^{3/2}}dx$

P6. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in [0,\infty)$ y definamos el conjunto

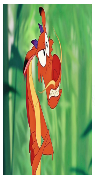
$$\mathcal{R} := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,\infty), 0 \leq y \leq f(x)\Big\}$$

Pruebe que $A(\mathcal{R})$ existe y calcúlela, pruebe que $V_{OX}(\mathcal{R})$ existe y que $V_{OY}(\mathcal{R})$ **no** existe.

Estimados y estimadas, son secos y secas, vamos que
vamos que les irá genial, hartas ganas respecto a esto y no se frustren
que sea difícil y tenga su dificultad no significa que no puedan. Puede que para algunos sea el
último aux, y debo decir que fue un gusto para mí, online y presencial

Atte Pato Auxx

sé que hablo rápido, me perdonan? Buenas Noches



Sea $f:[0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2-x}$

$R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 , 0 \leq y \leq f(x)\}$

a) Calcular $A(R)$

b) Calcular $V_{OX}(R)$

c) Calcular $V_{OY}(R)$

a) $A(R)$

Formula = $\int_a^b f(x)dx$ Aquí = $\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$

es continua en $[0,2]$
$\Rightarrow$ integrable en $[0,2]$
(Teo. 4.2)

CV =
$u = 2-x \Leftrightarrow x = 2-u$
$du = -dx$

Limites =
$x = 2 \Rightarrow u = 0$
$x = 0 \Rightarrow u = 2$

$$\Leftrightarrow \int_2^0 -(2-u)\sqrt{u}\,du = \int_0^2 (2-u)\sqrt{u}\,du$$

Separar porque cumple con transformación lineal

$$= 2\int_0^2 u^{1/2} - \int_0^2 \underbrace{u\,u^{1/2}}_{=u^{3/2}} du = 2\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^2 - \left[\frac{2}{5}u^{5/2}\right]_0^2$$

Aplico TFC

$$= \frac{4}{3}\cdot 2^{3/2} - \frac{2}{5}\cdot 2^{5/2} = \frac{2^{7/2}}{3} - \frac{2^{7/2}}{5} = 2^{7/2}\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2^{9/2}}{15}$$

b) V_{ox} Fórmula $= \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$

Calcular

$$\pi \int_0^2 \left(x\sqrt{2-x}\right)^2 dx = \pi \int_0^2 x^2(2-x)\,dx$$

continua en $[0,2]$ ⇒ integrable en $[0,2]$ (Teorema 4.2)

$$= \pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)\,dx = \pi\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2$$

Aplico TFC

$$= \pi\left(\frac{2^4}{3} - \frac{2^4}{4}\right) = 2^4\pi\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

c) V_{oy} Fórmula $= 2\pi \int_a^b x\,f(x)\,dx$

Calcular $= 2\pi \int_0^2 x^2\sqrt{2-x}\,dx$

continua en $[0,2]$ ⇒ integrable en $[0,2]$ (Teorema 4.2)

$\Leftrightarrow$

CV: $u = 2-x \Leftrightarrow x = 2-u$, $du = -dx$

Limites: $x=2 \Rightarrow u=0$, $x=0 \Rightarrow u=2$

$$2\pi \int_2^0 (2-u)^2\sqrt{u}\,(-du)$$

Propiedad de integrales $\int_a^b f(x) - dx = \int_b^a f(x)\,dx$

$$= 2\pi \int_0^2 (2-u)^2\sqrt{u}\,du$$

$$= 2\pi\left(\int_0^2 (4-4u+u^2)\sqrt{u}\,dx\right)$$

$$= 2\pi\left(4\int_0^2 \sqrt{u}\,du - 4\int_0^2 \underbrace{u\sqrt{u}}_{u^{3/2}}\,du + \int_0^2 \underbrace{u^2\sqrt{u}}_{u^{5/2}}\,du\right)$$

$$= 2\pi\left(4\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^2 - 4\left[\frac{2}{5}u^{5/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{7}u^{7/2}\right]_0^2\right)$$

Aplico TFC

$$= 2\pi\left(\frac{2^3}{3}\cdot 2^{3/2} - \frac{2^3}{5}\cdot 2^{5/2} + \frac{2}{7}\cdot 2^{7/2}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{2^{9/2}}{3} - \frac{2^{11/2}}{5} + \frac{2^{9/2}}{7}\right) = 2\pi\left(\frac{2^4\cdot 2^{1/2}}{3} + \frac{2^4\cdot 2^{1/2}}{7} - \frac{2^5\cdot 2^{1/2}}{5}\right)$$

mcm $= 105$

$$= 2\pi\left(2^{1/2}\left(\frac{560}{105} + \frac{240}{105} - \frac{672}{105}\right)\right) = 2\pi\left(\frac{128\cdot 2^{1/2}}{105}\right)$$

$$= \frac{\pi\cdot\sqrt{2}\cdot 256}{105} = \frac{\pi\cdot 2^{1/2}\cdot 2^8}{105} = \frac{\pi\cdot 2^{17/2}}{105}\ //$$

P4 PDQ para $a>0$,

$$\int_0^a x\, f(x/a)\,dx = a^2\int_0^1 x\, f(x)\,dx$$

Después calcular $\int_0^a x\,(\ln(x)-\ln(a))\,dx;\ a>0$

C.V.

Sea $u = x/a \iff u\cdot a = x$

$du = \dfrac{dx}{a} \iff dx = a\cdot du$

Límites

$x=a \Rightarrow u = a/a = 1$

$x=0 \Rightarrow u = 0/a = 0$

$$\int_0^a x\, f(x/a)\,dx = \int_0^1 u\cdot a\cdot a\, f(u)\cdot du$$

$$= a^2\int_0^1 u\cdot f(u)\,du$$

Como u es una variable muda

$$a^2\int_0^1 x f(x)\,dx \iff a^2\int_0^1 u\, f(u)\,du \quad \blacksquare$$

$$\int_0^a x(\ln(x)-\ln(a))\,dx = \int_0^a x(\ln(x/a))\,dx$$

- Propiedad del ln
- ln es continuo e integrable con $x\in(0,\infty)$; como $a>0$, está bien definida la función

Por propiedad que acabamos de demostrar con $f(x/a) = \ln(x/a)$

$$\int_0^a x\ln(x/a)\,dx = \boxed{a^2\int_0^1 x\ln(x)\,dx}$$

- Recuerdo que $x\in(0,\infty)$

Lo calcularé con integración por partes: $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

Sea $u = \ln(x)$

$du = 1/x\ dx$

$dv = x\ dx$

$v = \frac{1}{2}x^2$

$$a^2\int_0^1 x\ln(x)\,dx = a^2\left(\frac{\ln(x)\,x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,\frac{1}{x}\,dx\right.\ ;\ x\neq 0$$

$$= a^2\left(\frac{\ln(x)\,x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx\right.$$

$$a^2\left[\frac{1}{2}\left(\ln(x)x^2\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\left(x^2\right)\Big|_0^1\right]$$ / Aplico TFC

$$= a^2\left[\frac{1}{2}\left(\cancelto{0}{\ln(1)}1 - \lim_{x\to0^+}\underbrace{\ln(x)x^2}_{-\infty\cdot0}\right) - \frac{1}{4}\right]$$

saco el − pues lim cumple con trans. lineal

$$= a^2\left[\frac{1}{2}\left(-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{1/x^2}\right) - \frac{1}{4}\right] \iff a^2\left[-\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-2/x^3}\right) - \frac{1}{4}\right]$$

L'Hôpital

$x\neq0$

$$= a^2\left[-\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{-2}\right) - \frac{1}{4}\right] = a^2\left[-\frac{1}{2}\cdot0 - \frac{1}{4}\right] = -\frac{a^2}{4}\ //$$

$\lim_{x\to0^+}=0$ por Intro al Cálculo

$$= uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

P5 | Analizar convergencia de las integrales con reglas y criterios adecuados.

a) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx$ = Separo la integral en dos integrales. Esto se puede por propiedad de las integrales y porque es una $\int$ impropia de tipo mixta

$$= \underbrace{\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}}_{\text{Integral impropia de 2° Especie pues } f(x) \text{ no está definida en } x=3} + \underbrace{\int_4^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}}_{\text{Integral impropia de 1° Especie, pues uno de sus límites es } \infty}$$

Si ambas convergen, entonces $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^3-9}}$ también.

1) Analizaré $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ primero.

Por la regla de convergencia nr. 4 de la página 146 =

$\displaystyle\int_{a^+}^{b} f(x)dx$ converge si $\displaystyle\lim_{x\to a^+} (x-a)^{\alpha}\cdot f(x) = L > 0 \wedge \alpha < 1$

En este caso $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-9}} \wedge b = 4 \wedge a^+ = 3^+$

Calculemos =

$$\lim_{x\to 3^+} (x-3)^{1/2}\cdot \frac{1}{x\sqrt{(x-3)(x+3)}} =$$

- Opté por $\boxed{\alpha = \frac{1}{2} < 1}$
- Separaré los términos de la raíz, se puede hacer por propiedad.
- $(x-3) \neq 0$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\cancel{\sqrt{x-3}}}{x\cancel{\sqrt{x-3}}\sqrt{x+3}} = \frac{1}{3\sqrt{6}} = L > 0$$

Como el límite existe y es mayor estricto a 0, puedo afirmar que $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ converge.

2) Ahora veré si $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ converge.

Por la regla de convergencia nr. 1 de la página 146 =

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge si } \lim_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = L > 0 \text{ , } \alpha > 1$$

En este caso $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}$

Calculemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot 1/x}{\sqrt{x^2-9} \cdot 1/x}$$

• Opté por $\alpha = 2 > 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-9/x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1 = L > 0$$

Por lo tanto, $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ converge

Entonces, como $\int_3^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ y $\int_4^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ convergen,

podemos afirmar que $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ también por la regla de convergencia nr. 2. ii) de la página 142 del apunte.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^{3/2}}\,dx =$ Es una integral impropia de segunda especie, pues $f(x)$ no está definida en $x=0$

Utilizando las reglas de convergencia de la página 146 del apunte, veo que la regla nr. 4 me sirve para resolver esta integral impropia. Esta dice lo siguiente:

$$\int_{a^+}^{b} f(x)dx \text{ converge si } \lim_{x\to a^+} (x-a)^{\alpha} f(x) = L > 0 \;;\; \alpha < 1$$

En este caso $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x^{3/2}} \wedge a^+ = 0^+ \wedge b = 1$

Calculemos:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$$

- $\alpha = 1/2 < 1$
- $\frac{0}{0}$ = utilizaré l'Hôpital

$$\overset{\text{l'Hôpital}}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cdot\cos(2x)}{1} = 2 = L > 0$$

Como el resultado da un límite mayor estricto a 0 y $\alpha = 1/2 < 1$, por la regla nr. 4 puedo afirmar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^{3/2}}\,dx$ converge.

P6 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $x \in [0, \infty)$

$f(x)$ continua en $[0, t]$ con $t \to \infty$ $\Rightarrow$ integrable en $[0, t]$

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\infty),\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

a) PDQ: $A(R)$ existe + calcularla.

b) PDQ: V_{0x} $\exists$ y V_{0y} $\nexists$

a) $R = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ $\rightarrow$ Integral impropia de primer orden

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$$

Estas expresiones son equivalentes por la notación de la pág 141. Trabajaré con la expresión de la derecha.

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} \leq \underbrace{\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{x^2}}_{\text{Converge por página 142 del apunte}}$$

Converge por página 142 del apunte ($\frac{1}{x^\alpha}$ converge con $\alpha > 1$, $\alpha = 2$ en este ejemplo).

Como $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$ está acotada superiormente por una integral que converge, puedo afirmar que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$ converge también por el Teorema 7.1. Esto quiere decir que $A(R)$ existe.

(Probar que existe es equivalente a probar que converge, según lo visto en clases)

Cálculo $A(R) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^{t} \frac{dx}{1+x^2}$ } Notación página 141

$\int \frac{1}{1+x^2}$ es una integral primitiva, igual a $\arctan(x)$

Entonces,

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \to \infty} \left[\arctan(x)\right]_0^{t}$$ | Aplico TFC

$$= \lim_{t \to \infty} \left[\arctan(t) - \underbrace{\arctan(0)}_{0 \text{ por Intro al Cálculo}}\right] = \lim_{t \to \infty} \arctan(t) = \pi/2$$ por Intro al Cálculo

b) V_{ox} existe } Fórmula $V_{ox} = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$

En este caso:

$$\pi \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \pi \cdot \lim_{V \to \infty} \int_0^{V} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$$ | Notación página 141

Si demuestro que la integral converge, estoy demostrando que Vox existe, según lo visto en clases.

$$\pi \cdot \lim_{V \to \infty} \int_0^{V} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \leq \underbrace{\pi \cdot \lim_{V \to \infty} \int_0^{V} \frac{1}{1+x^2}\, dx}_{\text{Converge, pues lo probé al demostrar que } A(R) \text{ existe.}}$$

Como $\pi \cdot \lim_{V \to \infty} \int_0^{V} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$ está acotado superiormente por una integral convergente, puedo afirmar según el Teorema 7.1 que $\pi \cdot \lim_{V \to \infty} \int_0^{V} \frac{1}{(1+x^2)^2}$ que converge, o sea, existe Vox.

V_{oy} no existe $\underline{}$ = Fórmula $V_{oy} = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$

En este caso =

$$V_{oy} = \underbrace{2\pi \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx}_{\substack{\text{Integral de } 1^\circ \\ \text{Especie, pues} \\ \text{el intervalo no es acotado}}} = 2\pi \lim_{s \to \infty} \int_0^{s} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

| Notación página 141

$\frac{x}{1+x^2}$ continua en $[0,s]$

$\Rightarrow$ integrable en $[0,s]$

Si $\boxed{2\pi \cdot \lim_{s \to \infty} \int_0^{s} \frac{x}{1+x^2}\, dx}$ converge, entonces V_{oy} existe, según lo visto en clases.

Haré un C.V. =

$u = 1+x^2$

$du = 2x \cdot dx$

Limites

$x = s \Rightarrow u = 1+s^2$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$$\frac{2\pi}{2} \cdot \lim_{u \to \infty} \underbrace{\int_1^{\sqrt{u-1}} \frac{du}{u}}_{\substack{\text{integral} \\ \text{primitiva}}} = \pi \lim_{u \to \infty} \Big[\ln(u) \Big]_1^{\sqrt{u-1}}$$

Sabemos por Intro al Cálculo que

$$\lim_{u \to \infty} \ln(u) = \infty = \text{diverge}$$

Como $2\pi \lim_{s \to \infty} \int_0^{s} \frac{x}{1+x^2}\, dx$ diverge, puedo decir que V_{oy} no existe por lo visto en clases.

Integrales Impropias:

1° Especie: $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

(límite de una integral definida)

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\neq \lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} f(x)\,dx$$

importantísimo

Integral Fundamental:

$\forall a>0$: $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si $\alpha>1$; diverge si $\alpha\leq 1$

2° Especie:

Para b un punto de discontinuidad de f:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^{b^-} f(x)\,dx = \underbrace{\lim_{\gamma\to b^-} \int_a^{\gamma} f(x)\,dx}_{\text{límite de una integral definida}}$$

$$\int_b^c f(x)\,dx := \int_{b^+}^{c} f(x)\,dx = \lim_{\gamma\to b^+} \int_{\gamma}^{c} f(x)\,dx$$

Si a es otro punto de discontinuidad de f:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_{a^+}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b^-} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\gamma\to a^+} \int_{\gamma}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\gamma\to b^-} \int_c^{\gamma} f(x)\,dx$$

Integral Fundamental: Si b es pto de discontinuidad de f:

$\displaystyle\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ converge si $\alpha<1$; diverge si $\alpha\geq 1$

3° Especie: Mezcla de 1° con 2°.
Se debe separar en dos integrales de 1° y de 2° y analizar por separado.

Criterio de convergencia (para $\int$ de 1° o 2° especie)

muy importante (a veces es más útil criterio conv. absoluta)

Comparación: Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ a partir de un x_0, entonces:

$$\int f \leq \int g$$

Luego:

- Si $\int g$ converge $\Rightarrow \int f$ converge
- Si $\int f$ diverge $\Rightarrow \int g$ diverge

Obs: Si $\int f$ es de 1° especie entonces compararla con $\int \frac{1}{x^\alpha}$ para cierto α (converge si $\alpha > 1$)

Si $\int g$ es de 2° especie entonces compararla con $\int \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ para cierto α. (converge si $\alpha < 1$)

Cociente: Si $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$

entonces $\int f$ y $\int g$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Obs: Si $\int f$ es de 1° especie y la cocientamos con $\frac{1}{x^\alpha}$ para cierto α, luego

$\int f$ converge si $\lim x^\alpha f(x) = L > 0$, para $\alpha > 1$ (pues $\int \frac{1}{x^\alpha}$ converge)

Si $\int f$ es de 2° especie y la cocientamos con $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ para cierto α, luego

$\int f$ converge si $\lim (b-x)^\alpha f(x) = L > 0$, para $\alpha < 1$ (pues $\int \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ converge).

P1

a) $I = \int_0^\infty \frac{dx}{x+\sqrt{x+x^3}}$ 3° especie !

1) $I = \underbrace{\int_{0^+}^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x+x^3}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{x+\sqrt{x+x^3}}}_{I_2}$

I_2

Notar que $\forall x \geq 1$:

$$0 \leq \frac{1}{x+\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

Como $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ converge (pues $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

$\underset{\text{Criterio de comparación}}{\Rightarrow} \int_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x+x^3}}\,dx = I_2$ converge

I_1 Notar que para $0 < x \leq 1$:

$$0 \leq \frac{1}{x+\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$
$$= \frac{1}{(x-0)^{1/2}}$$

Como $\int_{0^+}^1 \frac{1}{(x-0)^{1/2}}\,dx$ converge (pues $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

$\underset{\text{Comparación}}{\Rightarrow} \int_{0^+}^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x+x^3}} = I_1$ converge

$\therefore I_1$ e I_2 convergen.

2) $I_2 = \int_1^\infty \frac{dx}{x+\sqrt{x+x^3}} = -\int_1^\infty \frac{-\frac{dx}{x^2}}{\frac{1}{x}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^3+\frac{1}{x}}}$

$\underset{\text{C.V.}}{=} \int_0^1 \frac{du}{u+\sqrt{u^3+u}} = I_1$

C.V.
$u = \frac{1}{x}$
$du = -\frac{1}{x^2}dx$
$x=1 \to u=1$
$x=\infty \to u=0$

Además, como $I = I_1 + I_2 = 2I_1$ e I_1 converge $\Rightarrow I$ converge

b) $\displaystyle\int_0^\infty \underbrace{e^{-x}\frac{\sin(x)}{x}}_{f(x)}\,dx$

¿Qué tipo de integral impropia?

Sólo 1° especie!!

No es de 2do pues en la posible discontinuidad (indefinición) se tiene:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} e^{-x}\frac{\sin(x)}{x}=e^{-0}\cdot1=e^0\cdot1=1$$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin(x)}{x}\,dx=\underbrace{\int_0^1 e^{-x}\frac{\sin(x)}{x}\,dx}_{\substack{=M\in\mathbb{R}\\ \text{(función continua es integrable)}}}+\underbrace{\int_1^\infty e^{-x}\frac{\sin(x)}{x}\,dx}_{<\infty\ ??}$$

$$\int_1^\infty \left|e^{-x}\frac{\sin x}{x}\right|dx$$

$$=\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\underbrace{|\sin(x)|}_{\le1}\,dx$$

$$\le\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

$$\le\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x)}\,dx \qquad \left(e^x\ge\underbrace{1+x}_{>0},\ \forall x>0 \Rightarrow e^{-x}\le\frac{1}{1+x},\ \forall x>0\right)$$

$$\le\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$<\infty\quad(\alpha=2>1)$$

$\therefore \displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$ es AC y por ende C.

Luego $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin x}{x}\,dx$ es C.

Este es el fin

Éxito

Atte Pato y Javier ♡