MA1002-1 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez

Auxiliar 12: Aplicaciones de la Integral II

15 de noviembre de 2021

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, se tiene que la longitud de la curva f entre a y b, esta dada por la fórmula:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1+|f'(x)|^2}dx$$

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, el área del manto generado por la rotación en torno al eje OX de f entre a y b es:

$$S_{OX}(f) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2}dx$$

- **Área en coordenadas polares:** Sea $\rho : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta-\alpha \leq 2\pi$ y que define una curva en coordenadas polares $\rho=\rho(\theta)$, entonces el área de la región $R = \{(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)) : \theta \in [\alpha,\beta], \rho \in [0,\rho(\theta)]\}$ está dada por:

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho(\theta)^2 d\theta$$

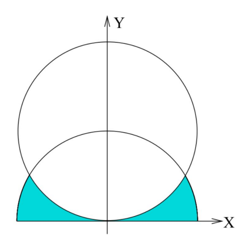
- **Centro de gravedad:** Sea R la región encerrada bajo el gráfico de una función no negativa e integrable. Es decir $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a,b], y \in [0,f(x)]\}$

  El centro de gravedad de R esta dado por

$$X_G = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \quad Y_G = \frac{\int_a^b \frac{f^2(x)}{2}dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

P1. *a)* Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f(0)=0$ y la longitud de la curva $y=f(x)$ entre 0 y x es igual a $x^2+2x-f(x)$. Determine $f(x)$.

b) Para $r>0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:
$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2,\ x^2+y^2-2ry \geq 0,\ y \geq 0\}$
Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.



P2. Dibuje las siguientes curvas considerando $r=r(\theta)$

a) $r=2$

b) $r^2-r-12=0$

c) $\theta = \frac{\pi}{6}$

d) $r = \frac{\theta}{2\pi}$

e) $r = tan(\theta)sec(\theta)$

f) $r = 2cos(\theta)$

g) $r = sen(2\theta)$

h) $r = 1+2sin(\theta)$

P3. *a)* Calcule el area que encierra la curva $\rho(\theta) = sen(2\theta)$.

b) Calcule el area encerrada entre las curvas $\rho_1(\theta) = sen(\theta)$ y $\rho_2(\theta) = 1+cos(\theta)$

P4. Se tiene una región fija de área A (generada a partir del área bajo la curva de una función f). Demuestre que el volumen de revolución en torno al eje OY y en torno al eje OX se calculan respectivamente como:

$$V_{OY} = 2\pi \cdot A \cdot X_G \qquad \text{y} \qquad V_{OX} = 2\pi \cdot A \cdot Y_G$$

Donde X_G y Y_G son las coordenadas del centro de masa de la región A

Propuestos[Sección alterna]

1. Considere la región $\mathcal{R}$ del primer cuadrante encerrada entre la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ y la parábola de ecuación $y=(x-2)^2$.

   a) **Área**
   Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

   b) **Volumen de Revolución**
   Calcule el volumen de revolución engendrado por $\mathcal{R}$ al girar en torno al eje OX.

2. Considere la función $f(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

   a) **Longitud de Curva**
   Calcule la longitud de la curva definida por f en el intervalo $[0,1]$.

   b) **Área del Manto de Revolución**
   Se define la región $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1], 0\leq y\leq f(x)\}$. Calcule el área del manto del sólido generado al rotar la región Ω en torno al eje OX.

   c) **Centro de Gravedad**
   Calcule las coordenadas del centro de gravedad bajo la función f en la región Ω.

”The air was cold. Taylor”