

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2021, Primavera

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez

Correo: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar 10: TFC-SUMAS-ÁREA

08 octaedro 2021

- Considere la región o área plana

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- [Rotación eje OX - Método del disco]

Dada la región R el volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OX será:

$$V = \int_a^b A(x) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar volúmenes de cilindros o discos de altura infinitesimalmente pequeña, cuya fórmula es

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Donde cada disco tiene $r = f(x)$ y $h = dx$.

- [Rotación eje OY - Método de la cáscara] Dada la región R , le agregamos la restricción de que $0 \leq a < b$. El volumen generado

al hacer rotar R en torno al eje OY será:

$$V = \int_a^b A(x) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar cilindros huecos, los cuales se calculan de la siguiente forma.

Dada el área sin tapas del cilindro, que se denomina área superficial de fórmula

$$A_{superficial} = 2\pi r h$$

Si la multiplicamos por una profundidad infinitesimal dx , obtendremos el volumen de un cilindro hueco. Notamos que r es la distancia del eje de giro hasta el cilindro hueco.

Por lo que reconocemos como $r = x$ (si el eje de giro es el eje OY) y $h = f(x)$.

P1. Considere la función $f(x) = x^2 \sqrt{2 - \cos(x^5)}$ Determine el volumen de la región formada al rotar la región encerrada entre 0 y 2 y la recta $y = 0$.

- Intuición:
- Teoría:
- Matraca:

P2. Sea $V(b)$ el volumen del sólido obtenido al rotar con respecto al eje x la región contenida entre la curva $y = x^{-3}$ y el eje x , desde $x = 1$ hasta $x = b$.

Analice el comportamiento de $V(b)$ a medida que $b \rightarrow \infty$.

- Intuición:
- Teoría:
- Matraca:

P3. Sea $f(x) = 2x - x^2$, dada su región sobre el eje X , calcule su área, par5a luego colocar una recta desde el origen hasta la función, de tal manera que el área sobre y bajo la recta sea la misma.

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

P4. Sea \mathcal{D} la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia de ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 5$ y la parábola de ecuación $y = 2(x - 1)^2$ (región bajo la circunferencia y sobre la parábola)

I Determine el área de la región \mathcal{D}

II Determine el volumen generado por sólido revolución en torno al eje OX.

III Determine el volumen generado por sólido revolución en torno al eje OY.

- 1) Intuición:
- 2) Teoría:
- 3) Matraca:

IV Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se define $G(x) = \int_x^{x+1} (x - t)f(t)dt$.
Demuestre que $G''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

P5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se define $G(x) = \int_x^{x+1} (x - t)f(t)dt$. Demuestre que

$$G''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

. (*Propuesto*)

- 1. Intuición:
- 2. Teoría:
- 3. Matraca:

“No tengo frase, pero que les vaya bacan!”

Pato