MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2019, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 8

25 de Octubre 2021

Recuerdo:

- Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. El conjunto $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una *partición del intervalo* $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Diremos que la norma de la partición P es:

$$|P| = \sup_{i \in \{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y denotamos al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ como $\mathcal{P}_{[a,b]}$.

Importante: notar que $(x_i - x_{i-1}) \leq |P|$

- Sea $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su suma superior e inferior como:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

donde $M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

- Si $P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $P \subseteq Q$ tenemos que:

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su integral superior e inferior como:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} S(f,P)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_{P \in \mathcal{P}_{[a,b]}} s(f,P)$$

- Diremos que una función es Riemann-Integrable (o simplemente integrable) si su integral superior e inferior coinciden. En dicho caso definimos la integral como:

$$\int_a^b f(x) = \overline{\int_a^b} f(x) = \underline{\int_a^b} f(x)$$

- **Criterio de Riemann:** f es integrable si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}, S(f,P) - s(f,P) \leq \varepsilon$$

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y monótona, entonces es integrable en $[a,b]$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable en $[a,b]$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua o acotada y monótona, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|P| \to 0} s(f,P) = \lim_{|P| \to 0} S(f,P)$$

$$= \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

Donde $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

- Dos particiones comunes son la equiespaciada:

$$x_i = x_0 + i\Delta x = a + i\frac{b-a}{n}$$

y la geométrica: $x_i = aq^i = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^i$.

- Propiedades de la integral
  - $\int_a^b c = c(b-a)$
  - $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ si $f(x) \leq g(x)$ en todo $[a,b]$
  - $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

- **Segundo TFC:** Si f es integrable en $[a,b]$ y existe una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b). Entonces: $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

P1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ derivable y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua tales que

$$f'(x)+g(x)f(x)=0$$

Usando definición de primitiva muestre que

$$\int g(x)dx=-\ln f(x)+C$$

a) Intuición: Primero me piden demostrar algo con un $ln(x)$ recordemos la definición de primitiva, y además cual la derivada de esta, y su integral, será esta función la que estoy trabajando? Eso es en un comienzo.
Me dan una igualdad, me puede ser conveniente el matraquearla y llegar a lo pedido.

b) Teoría: Las funciones deben estar bien definidas, no se debe anular una en particular, y deben ser integrables y derivables respectivamente.

c) Matraca: Ordenar lo que me dan sin matar gatitos, en realidad no es mucha.

P2. *a)* Considerando la partición $P=\{0,\frac{1}{2},1\}$ demuestre que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{e}\right)\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx\leq\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\right)$$

b) Demuestre que

$$\int_a^b\frac{1}{x}dx=ln(b)-ln(a)$$

, donde $0<a<b$
<u>Indicación:</u> Considere la partición $x_i=aq^i, i=0,1,\ldots,n$.

a) Intuición: Well como se dijo en clases, este tipo de ejercicios lo principal es ver que realmente lo puedo hacer mediante sumas de Riemann, tal como me dice la indicación me señalan una partición en particular.
Por lo que debo tener claro que atacaré el ejercicio por Riemann.
a)Me piden demostrar una desigualdad doble, que el término de la derecha son dos sumandos y el de la izquierda, también son dos sumandos, lo cual es muy sospechoso, pero sería bastante conveniente hacer la suma de Riemann de orden 2, ya que aquella me entrega 2 sumandos.
<u>PASOS PARTICIONES</u>
1)Identificar que se trata de sumas de Riemann, lo que es ver que debo demostrar una desigualdad doble generalmente, o una indicación con una partición específica.
2)Matraca: Definir m_i,M_i que recordemos que por definición son $m_i=inf\{f(x)\,,x\in[x_{i-1},x_i]\}\wedge M_i=sup\{f(x)\,,\,x\in[x_{i-1},x_i]\}$, lo cual lo puedo concluir solo mediante el crecimiento de la función.[El sup e inf están definido a través de un conjunto!!!!Axioma del supremo de intro c:]
Teoría: VER QUE LA INTEGRAL ESTÉ BIEN DEFINIDA, con los teoremas vistos en clases y condiciones necesarias y suficientes para que sea integrable(también están en el resumen de cada de la auxiliar!)
Entonces vemos la partición que nos dan $P=\{0,\frac{1}{2},1\}$. veo el crecimiento y defino $m_i\wedge M_i$, además debo ver en que intervalo manejo la partición por lo que debo definir $a,b,\triangle x_i,x_i$
3)Último paso de las sumas de Riemann es reemplazar todo lo que encontrar y trabajar para lo que piden demostrar, ojo que solo tengo dos intervalos en mi partición, pues $[0,\frac{1}{2}]\wedge[\frac{1}{2},1]$

b) Teoría: Lo importante teóricamente hablando en esta parte es tener en cuenta como es la función que quiero integrar y probar cada una de las hipótesis antes de matraquear su integral, además de que la función cumplirá ciertas características, con estas bien definidas podré definir el paso 2) anterior.

c) Matraca: Calcular todo lo anterior, no perderse en la matraca, ver bien el tema de los índices, además de tener claro que es lo que puedo matraquear y que no , recuerden que como dijimos en clases e^{-x^2} no tiene primitiva directa!

P3. Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

I Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i),\ \forall n \geq 2$$

II Considere $f(x) = ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{(-n+1)} \leq n!,\ \forall n \geq 1$$

a) Intuición:
I) Nos piden un ejercicio con dos partes que tiene una doble desigualdad, por lo que usaremos sumas de Riemann, eso no deben dudarlo, además vemos que nos dicen en que partición trabajar, por lo que no será tan complicado definir todas las cosas.
Ahora debo ver de que tipo es, equiespaciada o diferente? Una vez que tenemos esto, podemos comenzar a hacer los pasos que ya definimos en los problemas de sumas de Riemann.
II) La intuición debe ser usar la parte anterior, el pensamiento es para algo me hicieron desarrollar la parte anterior.

b) Teoría:
I) Vemos que me entregan características de la función las cuales debo usar para poder asegurarme que la función sea integrable realmente, notar desde donde está definido cada suma inferior o superior en su definición en el resumen (índice).
II) DEBE CUMPLIR CADA UNA DE LAS CONDICIONES DE LA PARTE ANTERIOR LA FUNCIÓN QUE NOS DICEN.

c) Matraca: Ver como definir de buena manera cada uno de los elementos m_i, M_i que recordemos que por definición son $m_i = inf\{f(x)\ ,\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \wedge M_i = sup\{f(x)\ ,\ x \in [x_{i-1}, x_i]\} \wedge a, b, \triangle x_i, x_i$ para luego poder reemplazar cada elemento en la desigualdad que cumplen las funciones integrables. Para la segunda parte una vez que vemos lo anterior, queda matraquear de buena manera y además no olvidar el caso $n = 1$, dado que lo anterior se cumple $\forall n \geq 2$ y nos piden demostrar $\forall n \geq 1$.

P4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa en $[a, b]$. Pruebe que si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ entonces $f(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$

a) Intuición:Este ejercicio en un comienzo me entregan una serie de hipótesis, para luego probar algo, entonces este será la parte teórica.
Tenemos que probar una implicancia de la forma $p \Rightarrow q$, la cual tenemos una serie de formas de probarla según vimos en introducción al álgebra.
En su defecto esta vez lo haremos por el método de contradicción, dado que lo que quiero probar es algo de no mayor dificultad de negar, y que puedo generar un absurdo. Desarrollando la manera directa cuesta un poco más arar el argumento, pero igual es posible.

b) Teoría: Para este ejercicio será bueno tener en cuenta ciertas cosas como la tricotomía de los reales, es decir que cuando un número es diferente de 0 debe ser positivo o negativo, además también que si tengo un número que es estrictamente positivo, siempre habrá un otro que viva entre él y 0, por densidad de $\mathbb{R}$.
En efecto considerar que en la página 89 del apunte hay propiedades de integrales que pueden ser útiles, en este caso la desigualdad

1) Desigualdad de funciones:

$$if\ f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Ojo que esto según la propiedad 5 en la página 89 es con valor absoluto, pero para este caso particular del ejercicio asumimos que la función está definida con imagen solo en los positivos. Analizar que debo cambiar para hacer la desigualdad estricta.

2) Desigualdad de intervalos en el dominio encajonados:

$$if\ [c,d] \subseteq [a,b] \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_c^d f(x)dx$$

Luego cual será la condición para tener la desigualdad estricta? Recordar que ocurre con una función continua en un cerrado y acotado. En particular en $[x_o - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

c) Matraca: Luego de poder usar todos los preeliminares, la matraca de este ejercicio es comenzar de la hipótesis de buena manera y acotar de manera que llego a una contradicción.

"Studies show owning a ladder is more dangerous that a loaded gun. That's why I own ten guns, just in case some fool tries to sneak in here with a ladder."
Stan Pines

P1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \iff f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ 1)

2) $f'(x) + g(x) f(x) = 0$

PDQ: $\int g(x)\,dx = -\ln f(x) + C.$

tomando 2) $f'(x) + g(x) f(x) = 0$

$-f'(x) = g(x) f(x)$, Usando 1)

$-\frac{f'(x)}{f(x)} = g(x) \quad / \int dx$

$-\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int g(x)\,dx$ / Pag 57 $\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c$

$= -\ln(|f(x)|) + C = \int g(x)\,dx$

$= -\ln(f(x)) + C = \int g(x)\,dx$ //

P2 | 1 | Considere $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

a) PDQ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{1/4}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{1/4}}\right)$

Pasos

1) Identificar: Que debo formar las sumas superiores e inferiores.

2) Ver cual es mi partición, y si es equiespaciada, identificar m_i y M_i los cuales los puedo conocer sob com el crecimiento de la función.

Podemos ver entonces, como e^{-x^2} es decreciente $(e^{-x^2})' < 0$; $-2xe^{-x^2}$, $\forall x \in [0,1]$.

$f(x_{i-1}) = M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ pues

$f(x_i) = m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$\Delta x_i = \frac{1}{2} = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$; $b = 1$, $a = 0$, $n = 2$.

Los intervalos serán $\overset{\boxed{i=1}}{[0, \frac{1}{2}]}$ y $\overset{\boxed{i=2}}{[\frac{1}{2}, 1]}$.

3) Luego definir $s(f,P)$ y $S(f,P)$

$s(f,P) = \sum_{i=1}^{2} m_i(f)\,\Delta x_i = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{e}\right)$ //

$S(f,P) = \sum_{i=1}^{2} M_i(f)\,\Delta x_i = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\right)$ //

Veamos que

$h(x) = -x^2$; $h(x)$ es continua en todo su dom

$g(x) = e^x$; $g(x)$ es continua en todo su dom

$g(h(x))$ será continua por álgebra y composición de funciones continuas.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{1/4}} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad s(f,P) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq S(f,P) //$$

b) $P \in P_{[a,b]}$; $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ PDQ $\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln(b) - \ln(a)$

$x_i = aq^i$. Como $x_n = b$

$x_n = b = aq^n \Rightarrow \frac{b}{a} = q^n$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = q = \exp \ln\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = q \quad ; \quad \lambda = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$q = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right) = \exp\left(\frac{\lambda}{n}\right)$$

$f(x)$ es decreciente en $\mathbb{R}^+$; $M_i = \frac{1}{x_{i-1}}$; $m_i = \frac{1}{x_i}$

$$\Rightarrow s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{aq^i}(aq^i - aq^{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

$$= (n+1-1)\left(1 - \frac{1}{q}\right) //$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow s(f,P) = m - \frac{m}{q}$$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_{i-1}}(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{aq^{i-1}}(aq^i - aq^{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{q^{-1}} - 1\right) = \sum_{i=1}^{m} q - 1 = mq - m //$$

Sabemos que $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $[a,b]$, $\Leftrightarrow$
$0 < a < b$

$$\Rightarrow s(f,P) \leq \int_a^b \frac{1}{x} dx \leq S(f,P)$$

$$m - \frac{m}{q} \leq \int_a^b \frac{1}{x} dx \leq mq - m \quad ; \quad q = \exp\left(\frac{\lambda}{m}\right)$$

$$m - m\exp\left(\frac{-\lambda}{m}\right) \leq \int_a^b \frac{1}{x} dx \leq m\exp\left(\frac{\lambda}{m}\right) - m$$

① ②

① $\lim_{m \to \infty} m - m\exp\left(\frac{-\lambda}{m}\right)$; $u = \frac{\lambda}{m} \xrightarrow{m \to \infty} u \to 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{u \to 0} \frac{\lambda}{u} - \frac{\lambda}{u} e^{-u} = \lim_{u \to 0} \lambda\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{ue^u}\right) = \lim_{u \to 0} \lambda\left(\frac{e^u - 1}{ue^u}\right) \nearrow \frac{\lim \text{I.C}}{}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{\lambda}{e^u}\left(\frac{e^u - 1}{u}\right) = \lambda //$$

Scanned with CamScanner

(2) $\lim_{n\to\infty} n \exp\left(\frac{\lambda}{n}\right) - n$

$u = \frac{\lambda}{n}$

$u \to 0$

$\lim_{u\to 0} \frac{\lambda}{u}\left(\exp(u)\right) - \frac{\lambda}{u}$

$= \lambda \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lambda$ //

En virtud del teorema del sándwich

$\Rightarrow \quad \lambda \leq \int_a^b \frac{1}{x}\,dx \leq \lambda$

la integral es una constante!

$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \lambda = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a)$ // $\boxtimes$

P3) f: $[1,\infty[\to \mathbb{R}$ no negativa y creciente.

a)

Como creciente

$f(1) \le f(x) \le f(n)$, $\forall x \in [1,n]$

como f es monótona y acotada es integrable

$P = \{x_0 = 1, x_1, \ldots, x_{n-1} = n\}$

$x_i = i+1$, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$

$M_i = f(x_i) = f(i+1)$

$m_i = f(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) = f(i)$ $\quad \Delta x_i = 1$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(i+1)$$

$$= \sum_{i=2}^{n} f(i)$$

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

$$\Rightarrow \quad s(f,P) \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{i=2}^{n} f(i), \quad \forall n \ge 2$$

b) $f(x) = \ln(x)$

$\ln(x)$, si $x \in [1, \infty)$ positiva y creciente
≥ 0

Usando a)

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n-1} i\right) = \ln((n-1)!)$

2) $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \ln(i) = \ln\left(\prod_{i=2}^{n} i\right) = \ln(n!)$

3) $\displaystyle\int_1^n \ln(x)\,dx = (x\ln(x) - x)\Big|_1^n = n\ln(n) - n + 1$

$\ln((n-1)!) \leq n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!)$ / e creciente

$(n-1)! \leq e^{n\ln(n) - n+1} \leq n!$

$(n-1)! \leq e^{n\ln(n)} e^{-n+1} \leq n!$

$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!$ // ; si $1 = n$ se tiene $1 \leq 1 \leq 1$

$\forall n \geq 1$

P4) $f:[a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$ continua, no negativa.

PDQ) $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

1) Sea $a < c < d < b$

$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_c^d f(x)\,dx$ y f tambien es continua en $[c,d]$

2) Sea $g(x) > f(x)$ en $[a,b]$

$\int_a^b g(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx$

I) Tenemos $p \Rightarrow q$ procederemos por contradicción.

II) $f(x) \neq 0$ entonces para algún $x_0 \in [a,b]$ $f(x_0) > 0$, Como f es continua debe existir $\varepsilon > 0$ $\forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \notin [a,b]$, $f(x) > 0$.

III) Luego f es continua en un cerrado y acotado por Waiestras alcanza mínimo y maximo

$M \geq f(x) \geq m \geq 0$ SPG $\bar{m} = \frac{m}{2}$, no es alcanzado por $f(x)$

Esto es notamente por ε.

$$f(x) \geq m > \bar{m} > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

$$g(x) = \bar{m}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{(1)}{\geq} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx \overset{(2)}{\geq} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \bar{m}\,dx$$

$$= \bar{m}\, 2\varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx > 0$$

Con hipótesis

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

$\therefore \; f(x) = 0 \;, \forall x \in [a,b]$ $\blacksquare$

Scanned with CamScanner

Ya terminamos !

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl