Control 2, MA-1A2 Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/2 (29 de Agosto)

P1) a) Dada una función continua f, se definen las integrales $A = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$, $B = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x)\,dx$ y $C = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} 2x)\,dx$.

i) (*2 ptos.*) Mediante cambios de variable apropiados, demuestre que $A = B = C$.

ii) (*1 ptos.*) Si además se sabe que $f(xy) = f(x) + f(y)$, pruebe que $C = -\frac{\pi}{2} f(2)$.

Solución

En A usamos el cambio de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$ y resulta:

$$A = -\int_{\pi/2}^{0} f\left(\cos(\tfrac{\pi}{2} - u)\right)\,du = \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen}(u)\,du = B$$

.... 0.5 ptos.

En C usamos $u = 2x$ con lo cual $du = 2dx$

$$C = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\operatorname{sen} u)\,du$$

.... 0.5 ptos.

Esta integral se descompone en la suma

$$C = \frac{1}{2}\left(B + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\operatorname{sen} u)\,du\right)$$

.... 0.5 ptos.

Ahora usamos el cambio de variable $u = \pi - t$ y obtenemos

$$C = \frac{1}{2}\left(B - \int_{\pi/2}^{0} f(\operatorname{sen}(\pi - t))\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(B + \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} t)\,dt\right) = B$$

.... 0.5 ptos.

Para el cálculo descomponemos así:

$$C = \int_0^{\pi/2} f(2\operatorname{sen} x \cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(2)\,dx + A + B$$

.... 0.5 ptos.

de donde $A = -\frac{\pi}{2} f(2)$

.... 0.5 ptos.

b) i) (*1.5 ptos.*) Dados $m, n \in \mathbb{N}^*$, calcule la integral $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx$, separando los casos $m = n$ de $m \neq n$.
Ind: Recuerde que $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

ii) (*1.5 ptos.*) Use el resultado anterior para calcular $J_m = \int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(mx)dx$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, para la función definida por $f(x) = \sum_{k=1}^{100} a_k \operatorname{sen}(kx)$. Distinga los casos $m \leq 100$ de $m > 100$.

Solución

Parte i: Usando la indicación se tiene que

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big\{\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\Big\}dx$$

.... 0.5 ptos.

Si $m = n$ esta integral queda

$$I_{m,n} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big\{1 - \cos((n+m)x)\Big\}dx = \pi$$

.... 0.5 ptos.

Si $m \neq n$ esta integral queda

$$I_{m,n} = 0$$

.... 0.5 ptos.

Parte ii: Como $f(x) = \sum_{k=1}^{100} a_k \mathrm{sen}\,(kx)$ se tiene que

$$\begin{aligned} J_m &= \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{sen}\,(mx)dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{100} a_k \mathrm{sen}\,(kx)\mathrm{sen}\,(mx)dx \\ &= \sum_{k=1}^{100} a_k I_{k,m} \end{aligned}$$

.... 0.5 ptos.

Usando la parte (a) se tiene que $I_{k,m} \neq 0$ solo para $k = m$. Luego los términos $k \neq m$ de la suma son nulos.

.... 0.5 ptos.

Así:

$$J_m = \begin{cases} \pi a_m & \text{si } m \leq 100 \\ 0 & \text{si } m > 100. \end{cases}$$

.... 0.5 ptos.

P2) a) Considere la función $f(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln x$.

i) (*1 ptos.*) Encuentre dominio, un cero y límites cuando $x \to 0^+$ y cuando $x \to +\infty$ de f.

ii) (*1 ptos.*) Calcule f' y determine intervalos de crecimiento de f y puntos extremos locales y globales de f (si existen).

iii) (*1 ptos.*) Calcule f'' y determine intervalos donde f es concava y donde es convexa. Encuentre las inflexiones de f. Bosqueje el grafo de f.

Solución

Parte i: El dominio de la función es $\mathbb{R}_+^*$ debido a la presencia del logaritmo. .... 0.2 ptos.

Los ceros se obtienen resolviendo la ecuación $x = \frac{1}{x} + 2\ln x$. Por inspección un cero es $x = 1$. .... 0.2 ptos.

Cuando $x \to 0^+$ se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+} x - \frac{1}{x} - 2\ln x = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}(1 - x^2 - 2x\ln x) = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

.... 0.3 ptos.

Cuando $x \to +\infty$ se tiene que

$$\lim_{x\to +\infty} x - \frac{1}{x} - 2\ln x = \lim_{x\to +\infty} x(1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x}) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

.... 0.3 ptos.

Parte ii: Cálculo de f':

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

.... 0.5 ptos.

La función es estrictamente creciente en todo su dominio. .... 0.5 ptos.

Parte iii: Cálculo de f'':

$$f''(x) = -2\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} = \frac{2(x-1)}{x^3}$$

.... 0.25 ptos.

Por lo tanto la función es convexa para $x > 1$ y concava para $x < 1$. .... 0.5 ptos.

Posee un punto de inflexión en $x = 1$ .... 0.25 ptos.

b) (*3 ptos.*) Usando la condición de Riemann, demuestre que la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

es Riemann integrable en el intervalo $[0, 2]$.
(**Ind:** *Dada una partición* $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *vea donde se cumple* $m_k(f) < M_k(f)$)

Solución

Usando la condición de Riemann, debe probarse que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}, \text{ tal que } S(f,P) - s(f,P) \leq \varepsilon$$

.... 0.5 ptos.

Sea entonces $\varepsilon > 0$ e intentemos encontrar la "buena" partición P.
Si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ se tiene que

$$m_k(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{k-1} \leq 1 \\ 2 & \text{si } x_{k-1} > 1 \end{cases}$$

Además,

$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_k \leq 1 \\ 2 & \text{si } x_k > 1 \end{cases}$$

.... 1.0 ptos.

Por lo tanto $m_k < M_k$ solamente en el intervalo de la partición que cumpla $x_{k-1} \leq 1 < x_k$.
Así

$$S(f,P) - s(f,P) = \Delta x_k$$

.... 1.0 ptos.

La condición de Riemann se cumple con cualquier partición tal que su intervalo en torno a $x = 1$ tenga largo menor o igual a ε.
Por ejemplo sirven:

- Particiones equiespaciadas tal que $\frac{2}{n} \leq \varepsilon$
- Particiones no equiespaciadas tales que $|P| \leq \varepsilon$
- La partición $P = \{0, 1, 1+\varepsilon, 2\}$

.... 0.5 ptos.

P3) a) (*2 ptos.*) Sean $x, t \in [0,1]$ y f continua en $[0,1]$, se define la función g como

$$g(x) = \int_0^1 e^{-|x-t|} f(t)dt.$$

Calcule $g'(x)$ y verifique que $g'(0) = g(0)$.

(**Ind:** *Separe en forma apropiada la integral que define a g, recordando que* $\int_a^b h = \int_a^x h + \int_x^b h$)

Solución

Usamos la indicación

$$g(x) = \int_0^1 e^{-|x-t|} f(t)dt = \int_0^x e^{-|x-t|} f(t)dt + \int_x^1 e^{-|x-t|} f(t)dt.$$

Y recordando que

$$\begin{aligned} y \in [0,x] &\Rightarrow -|x-t| = t-x, \\ y \in [x,1] &\Rightarrow -|x-t| = x-t. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x e^{t-x} f(t)dt + \int_x^1 e^{x-t} f(t)dt \\ &= e^{-x} \int_0^x e^t f(t)dt + e^x \int_x^1 e^{-t} f(t)dt \end{aligned}$$

.... $\boxed{0.5 \text{ ptos.}}$

Ahora

$$g'(x) = \left(e^{-x} \int_0^x e^t f(t)dt \right)' + \left(e^x \int_x^1 e^{-t} f(t)dt \right)'$$

Por T.F.C. (f es continua):

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^{-x} \int_0^x e^t f(t)dt + \cancel{e^{-x} e^x f(x)} + e^x \int_x^1 e^{-t} f(t)dt + \cancel{(-e^x e^x f(x))} \\ &= -e^{-x} \int_0^x e^t f(t)dt + e^x \int_x^1 e^{-t} f(t)dt \end{aligned}$$

.... $\boxed{1.0 \text{ ptos.}}$

Luego,

$$\begin{aligned} g'(0) &= -e^{-0} \cancelto{0}{\int_0^0 e^t f(t)dt} + e^0 \int_0^1 e^{-t} f(t)dt \\ &= \int_0^1 e^{-t} f(t)dt = g(0) \end{aligned}$$

.... $\boxed{0.5 \text{ ptos.}}$

b) Calcule las siguientes primitivas:

i) (*1 ptos.*) $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx.$

ii) (*1.5 ptos.*) $J = \displaystyle\int \frac{x^2+5}{(x-2)^3(x^2+4)}\, dx$. Aquí use separación en fracciones parciales pero NO CALCULE las constantes.

iii) (*1.5 ptos.*) $K_n = \displaystyle\int x^n \sqrt{x+1}\, dx$, $(n \in \mathbb{N})$. Aquí encuentre una fórmula de recurrencia entre K_n y K_{n-1} y calcule explícitamente K_0.

Solución

Parte i: Hacemos el cambio de variables $u = \sqrt{x}$ o equivalentemente $x = u^2$. Así, $dx = 2udu$ y

$$I = \int \frac{u}{1+u} 2u\, du = 2 \int \frac{u^2 - 1 + 1}{u+1}\, dudu = 2 \int u - 1 + \frac{1}{u+1}\, du$$

.... 0.4 ptos.

De este modo resulta

$$I = u^2 - 2u + 2\ln|u+1| + C$$

.... 0.3 ptos.

Es decir, volviendo a la variable original,

$$I = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x} + 1) + C$$

.... 0.3 ptos.

Parte ii: Separando en fracciones parciales (SIN CALCULAR LAS CONSTANTES) se tiene que

$$\frac{x^2+5}{(x-2)^3(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{DX+E}{x^2+4}.$$

.... (0.1 por cada término, el último visto como dos) 5*0.1 ptos.

Así se obtiene que

$$J = A\ln|x-2| - \frac{B}{x-2} - \frac{C}{2(x-2)^2} + \frac{D}{2}\ln(x^2+4) + \frac{E}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + K.$$

.... (0.2 por cada término, incluida la constante de integración) 5*0.2 ptos.

Parte iii: El caso $n = 0$ es directamente $K_0 = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$.

.... 0.3 ptos.

Para la fórmula por recurrencia, integramos por partes del modo siguiente:

$$\begin{array}{ll} u = x^n & du = nx^{n-1} \\ dv = \sqrt{x+1} & v = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \end{array}$$

.... 0.4 ptos.

Así se obtiene

$$\begin{aligned} K_n &= x^n \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int nx^{n-1}\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\, dx \\ &= \frac{2}{3}x^n(x+1)^{3/2} - \frac{2n}{3}\int x^{n-1}(x+1)\sqrt{x+1}\, dx \\ &= \frac{2}{3}x^n(x+1)^{3/2} - \frac{2n}{3}(K_n + K_{n-1}) \end{aligned}$$

.... 0.6 ptos.

De esta ecuación despejamos K_n para obtener que

$$K_n = \frac{2x^n(x+1)^{3/2} - 2nK_{n-1}}{3+2n}$$

.... 0.2 ptos.

Control 2, MA1A2 Cálculo Diferencial e Integral
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (30 de Mayo)

P.1.- Considere la función $f(x) = x \ln x$ en el intervalo $[1, 2]$. Para $n \in \mathbb{N}^*$ se define la partición $P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[1, 2]$ mediante la regla $x_i = q^i$ para $i = 0, \ldots, n$.

a) (*1 pto.*) Determine el valor de q tal que $x_n = 2$, calcule la norma de la partición P_n y demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} |P_n| = 0.$$

Solución

Para que $x_n = 2$ es necesario que $q^n = 2$ es decir, debemos escoger $q = \sqrt[n]{2}$. .... 0.3 ptos.

En el i-ésimo intervalo se tiene que

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q - 1)$$

Como $q > 1$ el máximo largo de intervalos se obtiene para $i = n$. Por lo tanto

$$|P_n| = 2^{\frac{n-1}{n}}(\sqrt[n]{2} - 1)$$

.... 0.4 ptos.

Tomado límite, como $\sqrt[n]{2} \to 1$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |P_n| = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n-1}{n}}(\sqrt[n]{2} - 1) = 1 \cdot (1 - 1) = 0.$$

.... 0.3 ptos.

b) (*1.5 ptos.*) Usando la partición P_n, calcule la suma de Riemann $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ en términos de q, n y la sumatoria $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^k$.

Solución

Usando la definición de f se tiene que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k \ln(q^k) q^{k-1}(q - 1)$$

.... 0.5 ptos.

Reordenando se obtiene

$$S_n = \ln(q)\frac{q-1}{q} \sum_{k=1}^{n} k(q^2)^k$$

.... 1.0 ptos.

c) (*1.5 ptos.*) Sabiendo que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^k = q\frac{1-q^n-nq^n(1-q)}{(1-q)^2}$, encuentre una fórmula para la suma S_n que le permita, pasando al límite, calcular la integral $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx$

Solución

Usando la indicación con la razón q^2 se tiene que

$$S_n = \ln(q)\frac{q-1}{q}\left\{q^2\frac{1-q^{2n}-nq^{2n}(1-q^2)}{(1-q^2)^2}\right\}$$

es decir

$$S_n = q\ln(q)\left\{\frac{1-q^{2n}+nq^{2n}(q^2-1)}{(q+1)(q^2-1)}\right\}$$

.... 0.5 ptos.

Pero como $q = \sqrt[n]{2}$, se tiene que $q^2 = \sqrt[n]{4}$ y $q^{2n} = 4$, resulta

$$S_n = \sqrt[n]{2}\ln 2\left\{\frac{-3+4n(\sqrt[n]{4}-1)}{(\sqrt[n]{2}+1)n(\sqrt[n]{4}-1)}\right\}$$

.... 0.2 ptos.

Sabemos que

$$\int_1^2 x\ln x = \lim_{n\to\infty} S_n$$

.... 0.3 ptos.

Para tomar límite recordamos que $\sqrt[n]{2} \to 1$ y $n(\sqrt[n]{4}-1) \to \ln 4$, por lo tanto:

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\ln 2\left\{\frac{-3+4n(\sqrt[n]{4}-1)}{(\sqrt[n]{2}+1)n(\sqrt[n]{4}-1)}\right\} = 1\cdot\ln 2\left\{\frac{-3+4\cdot\ln 4}{(1+1)\ln 4}\right\}$$

.... 0.5 ptos.

$$= -\frac{3}{4} + 2\ln 2$$

d) (*2 ptos.*) Recalcule la misma integral, pero ahora usando primitivas y el TFC. Coteje sus respuestas.

Solución

Usando el TCF se tiene que

$$\int_1^2 x\ln x = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2$$

.... 1.5 ptos.

$$= \left(\frac{4}{2}\ln 2 - \frac{4}{4}\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

.... 0.5 ptos.

P.2.- **a)** Sea g una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Se define la función f mediante la regla

$$f(x) = \int_0^x g(x-t) \operatorname{sen} t dt$$

Demostrar que se verifica la relación $f''(x) + f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Indicación: Hacer el cambio de variable $x - t = u$.

Solución

Usamos la indicación $x - t = u$, con lo cual $dt = -du$. queda

$$f(x) = -\int_x^0 g(u) \operatorname{sen}(x-u) du = \int_0^x g(u) \operatorname{sen}(x-u) du$$

. . . . 0.5 ptos.

Desarrollando un poco se obtiene:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \int_0^x g(u) \cos u du - \cos x \int_0^x g(u) \operatorname{sen} u du$$

. . . . 0.5 ptos.

Ahora derivamos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \int_0^x g(u) \cos u du + \operatorname{sen} x \, g(x) \cos x \\ &\quad + \operatorname{sen} x \int_0^x g(u) \operatorname{sen} u du - \cos x \, g(x) \operatorname{sen} x \\ &= \cos x \int_0^x g(u) \cos u du + \operatorname{sen} x \int_0^x g(u) \operatorname{sen} u du \end{aligned}$$

. . . . 1.0 ptos.

Derivamos nuevamente:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\operatorname{sen} x \int_0^x g(u) \cos u du + \cos x \, g(x) \cos x \\ &\quad + \cos x \int_0^x g(u) \operatorname{sen} u du + \operatorname{sen} x \, g(x) \operatorname{sen} x \\ &= -\operatorname{sen} x \int_0^x g(u) \cos u du + \cos x \int_0^x g(u) \operatorname{sen} u du + g(x) \end{aligned}$$

. . . . 0.5 ptos.

Esto último es $-f(x) + g(x)$. Luego sumando $f(x)$ se obtiene la relación pedida. . . . . 0.5 ptos.

b) Sea f la función definida por

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 2}}.$$

i) Demostrar que f es impar.

Solución

En efecto,

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 2}}.$$

.... 0.5 ptos.

Usando el cambio de variables $t = -u$ (donde $dt = -du$) queda

$$f(-x) = -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4 + u^2 + 2}} = -f(x)$$

.... 1.0 ptos.

ii) Calcular $f'(x)$ y encontrar los intervalos donde f crece y donde decrece.

Solución

Derivando se tiene que

$$f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 2}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 2}}.$$

.... 0.7 ptos.

Desarrollando un poco se tiene que

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - \sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 2}}{\sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 2}\,\sqrt{x^4 + x^2 + 2}},$$

.... 0.2 ptos.

ahora racionalizamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x^4 + x^2 + 2) - ((2x)^4 + (2x)^2 + 2)}{\sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 2}\,\sqrt{x^4 + x^2 + 2}\Big(2\sqrt{x^4 + x^2 + 2} + \sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 2}\Big)} \\ &= \frac{6(1 - 2x^4)}{\sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 2}\,\sqrt{x^4 + x^2 + 2}\Big(2\sqrt{x^4 + x^2 + 2} + \sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 2}\Big)}, \end{aligned}$$

.... 0.2 ptos.

Por lo tanto f es creciente si $1 - 2x^4 > 0$ y decreciente si $1 - 2x^4 < 0$.

O sea, f crece en $[-1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}]$ y decrece en $(-\infty, -1/\sqrt[4]{2}]$ y en $[1/\sqrt[4]{2}, \infty)$. .... 0.4 ptos.

P.3.- Considere las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x(x-\pi)$, con $x \in [0,\pi]$. Sea R la región encerrada entre los gráficos de las dos funciones.

a) Calcule el área de la región R.

Solución

$$A = \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x - x^2 + x\pi)dx = 2 - \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{2} = 2 + \frac{\pi^3}{6}.$$

.... 1.5 ptos.

b) Determine el volumen del sólido generado por la rotación de R en torno al eje OY.

Solución

$$V_{OY} = 2\pi \int_0^{\pi} (x \operatorname{sen} x - x^3 + x^2\pi)dx = 2\pi\left(\pi - \frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^4}{3}\right) = 2\pi\left(\pi + \frac{\pi^4}{12}\right).$$

.... 1.5 ptos.

c) Encuentre la posición del centro de gravedad de la región R.

Solución

$$x_g = \frac{M_{OY}}{A} = \frac{\pi + \frac{\pi^4}{12}}{2 + \frac{\pi^3}{6}} = \frac{\pi}{2}$$

.... 0.5 ptos.

$$M_{OX} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x - (x^2 - x\pi)^2) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi^5}{5} - 2\frac{\pi^5}{4} + \frac{\pi^5}{3})) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^5}{60}.$$

.... 0.5 ptos.

$$x_g = \frac{M_{OX}}{A} = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^5}{60}}{2 + \frac{\pi^3}{6}}$$

.... 0.5 ptos.

d) Determine el largo de la curva $y = g(x)$.

Solución

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (2x - \pi)^2} dx$$

.... 0.5 ptos.

Usando el cambio de variable $2x - \pi = \tan \varphi$ con $dx = \frac{1}{2} \sec^2 \varphi d\varphi$ se obtiene

$$L = \frac{1}{2} \int_{\arctan(-\pi)}^{\arctan(\pi)} \sec^3(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left(\int_{\arctan(-\pi)}^{\arctan(\pi)} \sec^3(\varphi) d\varphi \right)$$

.... 0.3 ptos.

Pero, integrando por partes se tiene que

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln(\sec x + \tan x))$$

.... 0.3 ptos.

Luego

$$L = \frac{1}{2} \int_{\arctan(-\pi)}^{\arctan(\pi)} \sec^3(\varphi) d\varphi = \frac{1}{4} \Big(\sec x \tan x + \ln(\sec x + \tan x) \Big) \Big|_{\arctan(-\pi)}^{\arctan(\pi)}$$

$$= \frac{1}{4} \Big(2\pi \sqrt{1 + \pi^2} + \ln\big(\tfrac{\sqrt{1+\pi^2}+\pi}{\sqrt{1+\pi^2}-\pi}\big) \Big)$$

.... 0.4 ptos.

Puede serle útil recordar las siguientes fórmulas:

$\boxed{\pi \int_a^b f^2(x) dx}$, $\boxed{2\pi \int_a^b x(f - g) dx}$, $\boxed{\int_a^b (f - g) dx}$, $\boxed{\frac{1}{A} \int_a^b x(f - g) dx}$, $\boxed{\frac{1}{A} \int_a^b \frac{(f^2 - g^2)}{2} dx}$, $\boxed{\int_a^b \sqrt{1 + g'^2} dx}$

Control 2, MA-1A2 Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/2 (11 de Octubre)

P1) a) *(3 ptos)* Mediante cambios de variables apropiados calcule:

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx \quad \textit{(Ind: complete el cuadrado perfecto)} \qquad \int_{2^5}^{4^5} \frac{dx}{x+x^{3/5}}$$

Solución

Completando el cuadrado perfecto la primera primitiva se escribe:

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}$$

. . . . 0.5 pto.

de modo que usamos el cambio $x+1 = 2\operatorname{sen} t$, con $dx = 2\cos t\, dt$.

$$\int \frac{4\operatorname{sen} t - 3}{2\cos t} 2\cos t\, dt = \int (4\operatorname{sen} t - 3)\, dt = -4\cos t - 3t + C.$$

. . . . 1.0 pto.

Para la segunda integral hacemos el cambio $x = u^5$ con $dx = 5u^4 du$. . . . . 0.5 pto.
Queda

$$\int_2^4 \frac{5u^4\, du}{u^5+u^3} = \int_2^4 \frac{5u\, du}{u^2+1} = \frac{5}{2}\ln(u^2+1)\Big|_2^4 = \frac{5}{2}\ln(\frac{17}{5})$$

. . . . 1.0 pto.

b) *(1.5 ptos)* Considere la Integral $I_n = \displaystyle\int \frac{du}{(1+u^2)^n}$. Demuestre que satisface la fórmula de recurrencia

$$I_{n+1} = \frac{u}{2n(1+u^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Solución

Consideremos la integración por partes definida por
$$\begin{array}{lll} f = \frac{1}{(1+u^2)^n} & \rightarrow & f' = \frac{-2nu}{(1+u^2)^{n+1}} \\ g' = 1 & \rightarrow & g = u \end{array}$$

. . . . 0.5 pto.

con eso se tiene que

$$I_n = \frac{u}{(1+u^2)^n} + 2n \int \frac{u^2+1-1}{(1+u^2)^{n+1}}$$

. . . . 1.0 pto.

de donde se obtiene el resultado

c) *(1.5 ptos)* Usando el cambio de variables $u^2 = \frac{x-1}{x+1}$ y la parte (b), calcule

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{dx}{x^2}$$

Solución

Usando este cambio de variables queda $2udu = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}dx = \frac{2}{(x+1)^2}dx$. Además despejando x queda $u^2x + u^2 = x - 1$, de donde $x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ y $x + 1 = \frac{2}{1-u^2}$. .... 0.5 pto.

La integral queda

$$\int u\Big(\frac{1-u^2}{1+u^2}\Big)^2 u\Big(\frac{2}{1-u^2}\Big)^2 du = \int \frac{4u^2}{(1+u)^2}du$$

.... 0.5 pto.

Separando en fracciones parciales (o sumando y restando 1 al numerador) esta primitiva queda

$$4\int \frac{1}{1+u^2} - 4\int \frac{1}{(1+u^2)^2}$$

Usando la parte anterior para la segunda primitiva ($n = 1$) obtenemos

$$4\int \frac{1}{1+u^2} - 4\left(\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\right) = 2\mathrm{arctg}\,(u) - \frac{4u}{1+u^2} + C.$$

.... 0.5 pto.

P2) a) *(2 ptos)* Identifique la sumatoria $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ como una suma de Riemann y calcule su límite cuando $n \to \infty$.

Solución

Claramente $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{1+(k/n)^2}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ para $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ y $x_k = \frac{k}{n}$ que forman una partición del intervalo $[0, 1]$. .... 0.5 pto.

Por lo tanto la sumatoria converge a la integral $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}$ .... 1.0 pto.

que vale $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$. .... 0.5 pto.

b) Considere una función $f\colon [a, b] \to [c, d]$ continua, biyectiva y estrictamente creciente.

i) *(0.5 ptos)* Explique por qué f^{-1} es también integrable y estrictamente creciente.

Solución

Al ser f continua, su inversa lo es y en consecuencia es Riemann integrable. Además las inversas de crecientes son crecientes. .... 0.5 pto.

ii) *(2 ptos)* Considere la partición $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y su correspondiente partición imagen $Q = \{f(x_0), \ldots, f(x_n)\}$ del intervalo $[c, d]$. Demuestre que

$$S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = bd - ac$$

Solución

Al tratarse de funciones crecientes se tiene que

$$M_i(f) = f(x_i) \qquad \text{y} \qquad m_i(f^{-1}) = f^{-1}(y_{i-1}) = x_{i-1}.$$

.... 0.5 pto.

Por lo tanto

$$S(f, P) + s(f^{-1}, Q) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(f(x_i) - f(x_{i-1})$$

.... 1.0 pto.

Reordenando queda

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)x_i - f(x_{i-1})x_{i-1} = f(x_n)x_n - f(x_0)x_0 = db - ca.$$

.... 0.5 pto.

iii) *(1.5 ptos)* Use apropiadamente las continuidades de f y f^{-1} para demostrar (a partir de (ii)) que $\int_c^d f^{-1} = bd - ac - \int_a^b f$

Solución

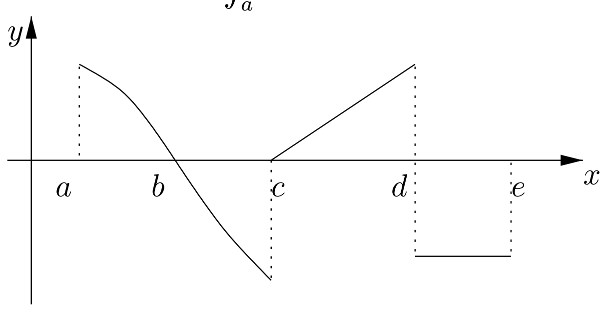
Por tratarse de funciones continuas, cuando las normas de las particiones P y Q tienden a cero, las sumas de Riemann tienden a las integrales correspondientes. .. 1.0 pto.

Luego, tomando límite en la expresión (ii) se tiene que

$$\int_a^b f + \int_c^d f^{-1} = bd - ac.$$

.... 0.5 pto.

P3) a) La figura muestra el gráfico de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, e]$. Con ella se define la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.



Indique, argumentando apropiadamente, cuales son los crecimientos, concavidades y continuidad de la función F.

Solución

Por TFC, la función F es siempre continua en todo el intervalo $[a, e]$. .... 0.8 pto.

Además, donde f es continua F es derivable y $F'(x) = f(x)$. Por lo tanto los signos de F' son los signos de f y así F es creciente en $[a, b]$ y $[c, d]$, y es decreciente en $[b, c]$ y $[d, e]$. .... 0.7 pto.

Las convexidades de F están asociadas al crecimiento de su derivada f. Por lo tanto F es convexa en $[c, d]$ y $[d, e]$ y es cóncava en $[a, c]$ y $[d, e]$. .... 0.5 pto.

b) Integrando por partes y acotando apropiadamente pruebe que $\lim_{n\to\infty} \left| \int_1^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)dx}{x} \right| = 0.$

Solución

Integramos por partes del modo $\begin{array}{lcl} f(x) = \frac{1}{x} & \to & f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ g'(x) = \operatorname{sen}(nx) & \to & g(x) = \frac{1}{n}\cos(nx) \end{array}$

Así la integral queda

$$\frac{1}{nx}\cos nx\Big|_1^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_1^{2\pi} \frac{\cos nx}{x^2} = \frac{1}{2\pi n} - \frac{\cos n}{n} + + \frac{1}{n}\int_1^{2\pi} \frac{\cos nx}{x^2}$$

.... 1.0 pto.

Acotando se tiene que

$$\left| \int_1^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(nx)dx}{x} \right| \leq \frac{1}{2\pi n} + \frac{1}{n} + + \frac{1}{n}\int_1^{2\pi} \frac{1}{x^2}$$

Claramente la cota tiende a cero cuando $n \to \infty$. .... 1.0 pto.

c) Considere las funciones $G(y) = \displaystyle\int_{\sqrt{y}}^1 yf(t)dt$ y $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} tf(x)dt$, donde f es continua en $\mathbb{R}$.

Calcule $G'(y)$ y $H'(x)$, y pruebe que si $f(x) = x$ entonces $\displaystyle\int_0^1 G(y)dy = \int_0^1 H(x)dx$.

Solución

Antes de derivar, notamos que $G(y) = -y\displaystyle\int_1^{\sqrt{y}} f$ y $H(x) = \frac{1}{2}x^4 f(x)$.

Por lo tanto $G'(y) = -\displaystyle\int_1^{\sqrt{y}} f - yf(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}$ y $H'(x) = 2x^3 f(x) + \frac{1}{2}x^4 f'(x)$. ..... 1.0 pto.

En el caso $f(x) = x$ queda $G(y) = -\frac{1}{2}y(y-1)$ y $H(x) = \frac{1}{2}x^5$, de donde $\displaystyle\int_0^1 G(y)dy = \frac{1}{3}$ y $\displaystyle\int_0^1 H(x)dx = \frac{1}{12}$. .... 1.0 pto.

Pauta Problema 1

a) Calcular $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2-i^2}}$

La suma puede escribirse como $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-i^2}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}$

Así, para $x_i = a + \frac{b-a}{n} i = \frac{i}{n} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b-a=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}$

(1.5) y es una suma de Riemann para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(1.5) Así $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-i^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$

b) Calcular el largo de la curva $G = \{(x, f(x)) \mid 0 \leq x \leq a\}$ para $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

$$f'(x) = a\,\mathrm{senh}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = \mathrm{senh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

(2.0) Entonces $L = \int_0^a \sqrt{1+(f'(x))^2} = \int_0^a \sqrt{1+\mathrm{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)} = \int_0^a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)dx$

(1.0) $\Rightarrow L = a\,\mathrm{senh}\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a = a\,\mathrm{senh}(1)$

OBSERVACION:

Tambien puede presentarse $L = a\,\mathrm{senh}(1) = a\sqrt{\cosh^2(1)-1}$

$$= a\sqrt{\frac{f(a)^2}{a^2}-1} = \sqrt{f^2(a)-a^2}$$

Pauta Problema 2

a) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (x-1)\,\text{sen}(t^2)\,dt}{\int_{x^2}^{x^3} \text{sen}(t^2-1)\,dt}$

Es un límite de la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x\to 1$ pues ambas integrales se anulan.

Aplicando la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (x-1)\,\text{sen}(t^2)\,dt}{\int_{x^2}^{x^3} \text{sen}(t^2-1)\,dt} = \lim \frac{(x-1)\int_1^x \text{sen}(t^2)\,dt}{\int_{x^2}^{x^3} \text{sen}(t^2-1)\,dt} \overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x \text{sen}(t^2)\,dt + (x-1)\left[\text{sen}(x^2)\right]}{3x^2\,\text{sen}(x^6-1) - 2x\,\text{sen}(x^4-1)} \ \frac{0}{0}$$

$\longrightarrow$ (1.5)

$$\overset{L'Hop}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\text{sen}(x^2) + \text{sen}(x^2) + 2x(x-1)\cos(x^2)}{6x\,\text{sen}(x^6-1) + 3x^2\cdot 6x^5\cos(x^6-1) - 2\,\text{sen}(x^4-1) - 2x\cdot 4x^3\cos(x^4-1)}$$

$$= \frac{2\,\text{sen}(1)}{18-8} = \frac{2\,\text{sen}(1)}{10} = \frac{1}{5}\,\text{sen}(1)$$

$\longrightarrow$ (1.5)

b) Calcular la derivada de la función $\int_0^{|x^3|} \text{sen}(t^2)\,dt$ en los puntos donde esta exista.

Para $x>0$ $\quad \int_0^{|x^3|} \text{sen}(t^2) = \int_0^{x^3} \text{sen}(t^2)\,dt = I(x)$

(0.7) $\longrightarrow$ $\quad \Rightarrow I'(x) = 3x^2\,\text{sen}(x^6)$.

Para $x<0$ $\quad \int_0^{|x^3|} \text{sen}(t^2)\,dt = \int_0^{-x^3} \text{sen}(t^2)\,dt = I(x)$

(0.8) $\longrightarrow$ $\quad \Rightarrow I'(x) = -3x^2\,\text{sen}(x^6)$.

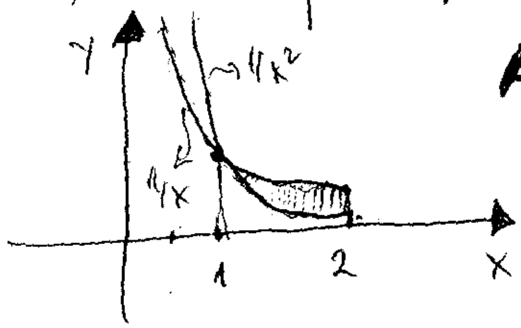
Para $x=0$, por definición $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{\int_0^{h^3} \text{sen}(t^2)\,dt - 0}{h} \overset{L'Hop}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{3h^2\,\text{sen}(h^6)}{\cancel{h}} \to 0$

(1.5) $\longrightarrow$ y $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{\int_0^{-h^3} \text{sen}(t^2)\,dt - 0}{h} \overset{L'Hop}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{-3h^2\,\text{sen}(h^6)}{\cancel{h}} \to 0$

Entonces la integral también es derivable en 0 con derivada cero.

Pauta Problema 3

a) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Calcular el area de la región R limitada por las funciones f, g y las rectas $x=1$ y $x=2$



$$A_R = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\ln x + \frac{1}{x}\right|_1^2 = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1$$

$$A_R = \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow$ (2.0)

b) Demostrar que existe un valor $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ para el cual el area encerrada por f y g y las rectas $x=a$ y $x=1$ es igual al area de la región R. Indicación: $2\sqrt[3]{2} < e$

Para $a \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{a} \Rightarrow A(a) = \int_a^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \ln x \Big|_a^1$

$$\Rightarrow A(a) = -1 + \frac{1}{a} + \ln a$$

Si $a = 1$, $A(1) = -1 + 1 + \ln(1) = 0$

$a = \frac{1}{2}$; $A(\frac{1}{2}) = -1 + 2 + \ln(\frac{1}{2}) = 1 - \ln 2 > 0$

Como $A_R = \ln 2 - \frac{1}{2}$, $A_R > A(1) = 0$ $\quad (\ln 2 > \frac{1}{2})$

y $A_R = \ln 2 - \frac{1}{2} < 1 - \ln 2 = A(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow 2\ln 2 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln 2 < \frac{3}{4}$

(1.0) $\longrightarrow$ lo que es verdadero por la indicación $2\sqrt[3]{2} < e \Leftrightarrow 2^{4/3} < e$

$\Leftrightarrow \ln 2 < 3/4$.

En consecuencia $A(1) < A_R < A(\frac{1}{2})$ y como $A(a) = -1 + \frac{1}{a} + \ln a$ es continua en $[1/2, 1]$, por TEO. VALOR INTERMEDIO $\exists a_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$

(1.0) $\longrightarrow$ tal que $A(a_0) = A_R$

c) Calcular el volumen del solido obtenido al rotar R entorno a OX.

$$V_{ox} = \pi \int_1^2 (f^2_{(x)} - g^2_{(x)})dx = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right)dx = \pi \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3}\right)_1^2 = \pi\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + 1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{3}\right) = \frac{12 + 1 - 8}{24}\pi \Rightarrow V_{ox} = \frac{5\pi}{24}$$

$\longrightarrow$ (2.0)

Control 2

P1. a) Calcule las siguientes primitivas

a.1) (2,0 ptos.) $\int x^3\sqrt{5-2x^2}dx$

a.2) (2,0 ptos.) $\int \frac{1}{2-\text{sen}^2(x)}dx$ **Indicación:** use $u=\tan(x)$.

b) (2,0 ptos.) Obtenga una relación de recurrencia para

$$I_n = \int \sqrt{x+b}(x+a)^n dx, \quad a,b,x>0$$

y calcule I_0.

Indicación: Puede ser útil usar la identidad $x+b=(x+a)+(b-a)$.

P2. a) (3,0 ptos.) Demuestre que $\exists\xi\in(1,e)$ tal que

$$\int_1^e (\ln(x))^{n+1}dx = (\ln(\xi))^n,\ n\geq 1 \quad \text{y concluya que} \quad \int_1^e (\ln(x))^{n+1}dx \leq \ln(\xi).$$

Debe justificar toda hipótesis que utilice.

b) Sea $a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\ln(n+i)-\ln(n)]$.

b.1) (1,0 pto.) Identifique a a_n como una suma de Riemann, determinando la función y la partición involucradas.

b.2) (2,0 ptos.) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$ usando la integral apropiada.

P3. a) Se definen, para $x>0$, las funciones

$$G(x)=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2} \quad \text{y} \quad H(x)=\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}.$$

a.1) (1,0 pto.) Demuestre que $G'(x)=H'(x)$.

a.2) (1,0 pto.) Concluya, justificando, que $G(x)=H(x)$, $\forall x>0$.

a.3) (1,0 pto.) Calcule las integrales definidas para $G(x)$ y $H(x)$ y deduzca la identidad

$$\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}, \forall x>0.$$

b) b.1) (1,5 ptos.) Calcule

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x (x-1)\,\text{sen}(t^2)dt}{\int_{x^2}^{x^3}\text{sen}(t^2-1)dt}.$$

b.2) (1,5 ptos.) Encuentre una función f y un real $a>0$ tales que

$$6+\int_a^x\frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}, \quad \forall x>0.$$

10 de octubre de 2009
Sin consultas
Tiempo: 3:00 hrs.

Calculo Diferencial e Integral - Control 2

Pauta Problema 1

a) a.1) $\int x^3\sqrt{5-2x^2}\,dx$ conviene el reemplazo $t^2=5-2x^2$, $x^2=\frac{5-t^2}{2}$

así $2t\,dt=-4x\,dx$

1.0

$$\int x^3\sqrt{5-2x^2}\,dx = \int x^2\sqrt{5-2x^2}\,x\,dx = \int \frac{5-t^2}{2}\sqrt{t^2}\left(-\frac{1}{2}t\,dt\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\int (5-t^2)t^2\,dt = -\frac{1}{4}\int (5t^2-t^4)\,dt = -\frac{1}{4}\left[\frac{5}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right]+C$$

1.0

y en la variable original $\int x^3\sqrt{5-2x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\left[\frac{5}{3}(5-2x^2)^{3/2}-\frac{1}{5}(5-2x^2)^{5/2}\right]+C$

observación: Tambien puede resolverse con reemplazo trigonometrico $x=\sqrt{\frac{5}{2}}\operatorname{sen} t$.

a.2) $\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x}$ Según indicación $u=\operatorname{tg} x$

entonces $du=\sec^2 x\,dx=(1+\operatorname{tg}^2 x)dx \Rightarrow dx=\frac{du}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{du}{1+u^2}$

1.0

y $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\frac{1}{\sec^2 x} = 1-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 1-\frac{1}{1+u^2}=\frac{u^2}{1+u^2}$

Así $$\int \frac{dx}{2-\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{\frac{du}{1+u^2}}{2-\frac{u^2}{1+u^2}} = \int \frac{du}{2+2u^2-u^2} = \int \frac{du}{2+u^2}$$

1.0

y $$\int \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)+C$$

b) $I_n=\int \sqrt{x+b}\,(x+a)^n\,dx$

Por partes $u=(x+a)^n \rightarrow du=n(x+a)^{n-1}dx$

$dv=(x+b)^{1/2}dx \rightarrow v=\frac{2}{3}(x+b)^{3/2}$

Así $I_n=\frac{2}{3}(x+a)^n(x+b)^{3/2}-\frac{2}{3}n\int (x+a)^{n-1}(x+b)^{3/2}dx$ → 0.5

$$\Rightarrow I_n=\frac{2}{3}(x+a)^n(x+b)^{3/2}-\frac{2n}{3}\int (x+a)^{n-1}\sqrt{x+b}\,\underbrace{(x+b)}_{(x+a+b-a)}dx \rightarrow \text{indicación}$$

$$\Rightarrow I_n=\frac{2}{3}(x+a)^n(x+b)^{3/2}-\frac{2n}{3}\Big[\underbrace{\int (x+a)^n\sqrt{x+b}\,dx}_{I_n}+(b-a)\underbrace{\int (x+a)^{n-1}\sqrt{x+b}\,dx}_{I_{n-1}}\Big]$$ → 1.0

agrupando $I_n=\frac{2}{2n+3}(x+a)^n(x+b)^{3/2}-\frac{2n}{2n+3}(b-a)I_{n-1}$ $\forall n\geq 1$

Además $I_0=\int (x+b)^{1/2}dx=\frac{2}{3}(x+b)^{3/2}+C$ → 0.5

Pauta Problema 2

a) La integral se puede escribir como $\int_1^e (\ln x)^{n+1} dx = \int_1^e (\ln x)^n \ln x \, dx$

donde $(\ln x)^n$ es continua en $(1,e)$ y $\ln x$ es integrable en $(1,e)$, pues

(0.5) también es continua, y no cambia de signo (>0) en $(1,e)$.

Con esto se satisfacen las hipótesis del TVMG para integrales

(1.0) y por lo tanto $\exists \xi \in (1,e)$ tal que $\int_1^e (\ln x)^n \ln x \, dx = (\ln \xi)^n \int_1^e \ln x \, dx$

Además $\int_1^e \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = e - (e-1) = 1$

Partes $\begin{cases} u = \ln x \rightsquigarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \rightsquigarrow v = x \end{cases}$

(1.0) Así $\int_1^e (\ln x)^{n+1} dx = (\ln \xi)^n$, $\xi \in (1,e)$, $n \geq 1$

También, como $\xi \in (1,e) \to \ln \xi \in (0,1) \Rightarrow (\ln \xi)^n \leq \ln \xi$, $n \geq 1$

(0.5) se concluye que $\int_1^e (\ln x)^{n+1} \leq \ln \xi$ algún $\xi \in (1,e)$.

b) b.1) $a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\ln(n+i) - \ln(n)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{n+i}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$

Entonces la partición de $[a,b]$ será $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow b-a = 1$

Además $x_i = a + i\frac{b-a}{n} = 1 + \frac{i}{n} \Rightarrow a = 1$

Así, $a = 1$, $b = 2$ y $f(x) = \ln x$

OBS: También puede ser $a = 0$, $b = 1$ y $f(x) = \ln(1+x)$ (1.0)

b.2) Según lo anterior (b.1) la suma de Riemann se calcula como

$\lim_{n\to\infty} (a_n) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(n+i) - \ln(n)) \right\} = \int_1^2 \ln x \, dx$ (0.5)

Por partes, ya se calculó en el punto a)

$\int_1^2 \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = 2\ln 2 - (2-1) = 2\ln 2 - 1$

Entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n) = 2\ln 2 - 1$ (1.5)

Pauta Problema 3

a) $G(x) = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$, $H(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}$ $\quad x>0$

a.1) $G'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \longrightarrow$ 0.5

$H'(x) = \left(\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}\right)' = 0 - \frac{1}{1+x^2}\underbrace{(x)'}_{1} = -\frac{1}{1+x^2}$

Entonces $G'(x) = H'(x) \longrightarrow$ 0.5

a.2) Como $G'(x) = H'(x) \Rightarrow G(x) = H(x) + C$ → constante. $\longrightarrow$ 0.5

Para $x=1$, $G(1) = H(1) + C$ pero $G(1) = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^2} = 0$

y $H(1) = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^2} = 0$.

Así, $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

Sigue que $G(x) = H(x) \quad \forall x>0 \longrightarrow$ 0.5

a.3) Las integrales son $G(x) = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_1^{1/x} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}$

$H(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_x^1 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(x) \longrightarrow$ 0.6

Como $G(x) = H(x)$, $\forall x>0 \Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(x)$

$\Rightarrow \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ 0.4

b) b.1) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\int_1^x (x-1)\operatorname{sen}(t^2)dt}{\int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen}(t^2-1)dt} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\int_1^x \operatorname{sen}(t^2)dt}{\int_{x^2}^{x^3}\operatorname{sen}(t^2-1)dt} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\int_1^x \operatorname{sen}(t^2)dt + (x-1)\operatorname{sen}(x^2)}{3x^2\operatorname{sen}(x^6-1) - 2x\operatorname{sen}(x^4-1)}$ 0.7

0.8 $\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{2\operatorname{sen}(x^2) + \underbrace{(x-1)2x\cos(x^2)}_{\to 0}}{\underbrace{6x\operatorname{sen}(x^6-1)}_{\to 0} + 3x^2 6x^5\cos(x^6-1) - \underbrace{2\operatorname{sen}(x^4-1)}_{\to 0} - 2x4x^3\cos(x^4-1)} = \frac{2\operatorname{sen}(1)}{18-8} = \frac{1}{5}\operatorname{sen}(1)$

b.2) $6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}$

Para $x = a > 0$, $6 + \underbrace{\int_a^a \frac{f(t)}{t^2}dt}_{0} = 2\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9 \longrightarrow$ 0.5

Derivando, según TFC. $0 + \frac{f(x)}{x^2} = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = x^{3/2} \longrightarrow$ 1.0

<u>OBS</u>: También puede determinarse $f(x)$ primero, reemplazar en $\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt$ y luego, calcular la integral y determinar el valor de a.

MA1002,Pauta Control 2
Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliar: Benjamín Obando, Ayudante:Carlos Duarte

P1. *a*) Se dan las funciones f y g definidas de la manera siguiente:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt, g(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$$

Para $x > 0$.Demostrar que $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^+$.
Solución:
Para demostrar estos tenemos dos formas:
(a)**Cambio de variable:**
Para $g(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt$ realizamos el cambio de variable $t = \frac{1}{u}$. De esta forma $dt = -\frac{1}{u^2}du$. Así la integral queda:

$$g(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt = \int_1^x \frac{-ln(u)}{\frac{1+u^2}{u^2}} \frac{-du}{u^2} = f(x)$$

(b) **T.F.C.:**
Usando el T.F.C. probaremos que $f'(x) = g'(x)$. Así sabemos que $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante a determinar. Pero notemos que $f(1) = g(1) = 0$, así ya que la igualdad anterior se tiene $\forall x \in \mathbb{R}^+$ tenemos que $c = 0$. Entonces demostremos que $f'(x) = g'(x)$. Notemos que por T.F.C. tenemos que

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1}, g'(x) = \frac{\ln(\frac{1}{x})}{(\frac{1}{x})^2+1}\frac{-1}{x^2}$$

Así simplificando en $g'(x)$ obtenemos que $g'(x) = f'(x)$ con lo que concluimos la demostración.

b) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^3} + \sqrt[n]{e^4} + ... + \sqrt[n]{e^n}}{n}$$

Identificando con una suma de Riemann.
Solución:
Notemos que

$$\frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^3} + \sqrt[n]{e^4} + ... + \sqrt[n]{e^n}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}}$$

Asi Identificando $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ nos damos cuenta de inmediato que es la suma de Riemann de la función $f(x) = e^x$ considerando la partición del intervalo $[0, 1]$.Así en el límite la suma se transforma en:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 e^x dx = e - 1$$

c) Calcular

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e(x^2-\pi^2)+\pi\int\limits_{x^2}^{\pi^2} \frac{e^{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{t})}}{\sqrt{t}}}{1+\cos x}$$

Solución:

Notemos que $\int\limits_{x^2}^{\pi^2} \frac{e^{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{t})}}{\sqrt{t}}$ como función de x es continua por ende notamos que el límite anterior es del estilo $\frac{0}{0}$ por ende podemos ocupar la regla de L'Hopitall. Así notemos que

$$(\int\limits_{x^2}^{\pi^2} \frac{e^{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{t})}}{\sqrt{t}})' = -\frac{e^{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x^2})}}{\sqrt{x}^2}2x$$

. Entonces:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e(x^2-\pi^2)+\pi\int\limits_{x^2}^{\pi^2} \frac{e^{\sin(\frac{1}{2}\sqrt{t})}}{\sqrt{t}}}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{2xe-2\pi e^{\sin(\frac{1}{2}x)}}{-\sin(x)}$$

Donde Notemos nuevamente dado que $\sin(\frac{\pi}{2})=0$ el límite anterior es del estilo $\frac{0}{0}$. Así ocupando L'Hopitall nuevamente tenemos que

$$\lim_{x\to\pi} \frac{2xe-2\pi e^{\sin(\frac{1}{2}x)}}{-\sin(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{2e-2\pi e^{\sin(\frac{1}{2}x)}\frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2})}{-\cos(x)} = 2e$$

P2. Calcular las primitivas e integrales siguientes:

a)

$$\int x^2 \arctan(x)dx$$

Solución:

Utilizando integración por partes $dv=x^2 \Rightarrow v=\frac{1}{3}x^3$, $u=\arctan(x) \Rightarrow du=\frac{1}{1+x^2}$ nos queda:

$$\int x^2\arctan(x)dx = \frac{1}{3}x^3\arctan(x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}$$

Ahora notemos que:

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int \frac{x^3+x-x}{1+x^2}dx = \int \frac{x(x^2+1)}{1+x^2}dx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Así remplazando:

$$\int x^2\arctan(x)dx = \frac{1}{3}x^3\arctan(x) - \frac{1}{3}(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)) + c$$

b)

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+1}dx$$

Indicación: Usar el cambio de variable $tg(\frac{x}{2})=t$

Solución:

Notemos que realizando el cambio de variable propuesto en la indicación tenemos que $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ y $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ la integral queda:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+1}dx = \int \frac{4t}{(1+t^2)(1+t)^2}$$

Aplicando el metodo de fraciones parciales:

$$\frac{4t}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{ax+b}{1+t^2} + \frac{c}{(1+t)} + \frac{d}{(1+t)^2}$$

Con a, b, c y d constantes a determinar.Antes de hacerlo notemos que:

$$\int \frac{4t}{(1+t^2)(1+t)^2}dt = \int \frac{at+b}{1+t^2}dt + \int c\frac{dt}{(1+t)} + d\int \frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$a\int \frac{t}{1+t^2}dt + b\int \frac{dt}{1+t^2} + \int c\frac{dt}{(1+t)} + d\int \frac{dt}{(1+t)^2} =$$

$$\frac{a}{2}\ln(1+t^2) + b\arctan(t) + c\ln(1+t) - d(1+t)^{-1} + K =$$

$$\frac{a}{2}\ln(1+\tan(\frac{x}{2})^2) + b\frac{x}{2} + c\ln(1+\tan(\frac{x}{2})) - d(1+\tan(\frac{x}{2}))^{-1} + K$$

Ahora calculemos a, b, c y d. Notemos que:

$$\frac{4t}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{(a+c)t^3 + (2a+b+c+d)t^2 + (a+2b+c)t + (b+c+d)}{(1+t^2)(1+t)^2}$$

Así obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + c = 0$$

$$2a + b + c + d = 0$$

$$a + 2b + c = 4$$

$$b + c + d = 0$$

Que nos da como solución $a = 0, b = 2, c = 0, d = -2$. Así la integral pedida es:

$$\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+1}dx = x + 2(1+\tan(\frac{x}{2}))^{-1} + K$$

c)

$$\int_{-1}^{9} x\sqrt{9+8x-x^2}dx$$

Indicación: Completar el cuadrado binomio.

Solución:

Considerando la indicación $9 + 8x - x^2 = 25 - (x-4)^2$. Aplicando el cambio de variable $x - 4 = u \Rightarrow du = dx$. Para los limites de integración si $x = 9 \Rightarrow u = 5$, si $x = -1 \Rightarrow u = -1$. Asi

$$\int_{-1}^{9} x\sqrt{9+8x-x^2}dx = \int_{-5}^{5}(u+4)\sqrt{5^2-u^2}du = \int_{-5}^{5} u\sqrt{5^2-u^2}du + 4\int_{-5}^{5}\sqrt{5^2-u^2}du$$

Notemos que $u\sqrt{5^2-u^2}$ es una función impar, por ende al ser integrada en un intervalo simétrico su integral es cero($\int_{-5}^{5} u\sqrt{5^2-u^2}du = \frac{1}{2}(5^2-u^2)^{\frac{3}{2}} \mid_{-5}^{5}= 0$). Así solo resta calcular la otra integral para lo cual realizaremos el cambio de variable trigonométrico $u = 5\sin(\theta) \Rightarrow du = 5\cos(\theta)$. Para los limites de integracion tenemos que $u = 5 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ y $u = -5 \Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{2}$.

$$\int_{-5}^{5} \sqrt{5^2-u^2}du = 25\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^2 d\theta$$

Para calcular esa integral utilizaremos la identidad $\cos(2\theta) = 2(\cos(\theta))^2 - 1$.Así

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2} d\theta = \sin(2\theta) \mid_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Así remplazando estos resultados en la integral original

$$\int_{-1}^{9} x\sqrt{9+8x-x^2}dx = 50\pi$$

P3. *a*) Sea $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$. Considere sobre la parábola el punto $(a, f(a))$ $a \geq 0$. Demuestre que el área comprendida entre la parábola y el segmento que une $(0,1)$ con $(a, f(a))$ es igual a $A = a^3$

Solución:

Notemos que es necesario obtener la ecuación de la recta que une el punto $(0,1)$ con el punto $(a, f(a))$. Esta esta definida por $y = \frac{f(a)-1}{a}x + 1$.De esta forma ya que la recta solo intersecta a la parábola en 2 puntos (salvo cuando $a = 0$) el area pedida se puede calcular como la integral entre estos dos puntos de intersección de la recta con la parábola que por construcción son $(0,1)$ y $(f(a), a)$ de $f(x)$ menos la recta antes descrita. Así:

$$A = \int_0^a f(x) - (\frac{f(a)-1}{a}x + 1)dx =$$

$$-6\frac{x^3}{3} \mid_0^a + \frac{5x^2}{2} \mid_0^a + x \mid_0^a - (\frac{f(a)x^2}{2a} \mid_0^a - \frac{x^2}{2a} \mid_0^a + x \mid_0^a) =$$

$$-6\frac{a^3}{3} + \frac{5a^2}{2} + a - (\frac{(-6a^2+5a+1)a}{2} - \frac{a}{2} + a) = a^3$$

b) Se tienen las curvas $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}$:

1) Calcular el área encerrada entre ambas curvas
2) Calcular el volumen del solido generado por la rotación de la función $min\{f(x), g(x)\}$ en torno al eje OX.

Solución:

(a)Para calcular el área pedida necesitamos los puntos de intersección de las dos curvas. Asi:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Así el area encerrada entre las dos curvas es:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x)-g(x))dx = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx - \sqrt{3} =$$

$$4\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx - \sqrt{3} = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (cos(\theta))^2 d\theta - \sqrt{3} =$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2\theta)+1d\theta - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

(b) Notemos que debemos dividir el problema en el calculo de 3 volumenes, el volumen en $[-1,-\frac{1}{2}]$ generado por f, el volumen $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ generado por g y $[\frac{1}{2},1]$ generado por f que por la simetría del problema es igual al primer volumen. Asi:

$$V_{ox([-1,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},1])} = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} f^2(x)dx = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x^2)dx = 2\pi(\frac{1}{2} - \frac{x^3}{3}\mid_{\frac{1}{2}}^{1}) = \frac{5\pi}{12}$$

Ahora resta calcular la integral de volumen de g en el intervalo $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Así:

$$V_{ox([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])} = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (g(x))^2dx = \pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3})^2dx =$$

$$\pi(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (4-x^2-2\sqrt{1-x^2}\sqrt{3})dx) = \pi(4-\frac{1}{12} - 2\sqrt{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx) =$$

$$\pi(\frac{47}{12} - 4\sqrt{3}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx) = \pi(\frac{47}{12} - 4\sqrt{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (\cos(\theta))^2 d\theta) =$$

$$\pi(\frac{47}{12} - 2\sqrt{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2\theta)+1d\theta) = \pi(\frac{47}{12} - 2\sqrt{3}(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\mid_{0}^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{6})) =$$

$$\pi(\frac{47}{12} - 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6})) = \pi(\frac{47}{12} - \frac{6}{4} - \frac{2\sqrt{3}\pi}{6}) = \pi(\frac{29}{12} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3})$$

Así el volumen pedido en el problema lo calculamos como :

$$V_{ox([-1,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},1])} + V_{ox([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])} = \frac{5\pi}{12} + \pi(\frac{29}{12} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3})$$

Pauta Control 2

P1. $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, dos veces diferenciable en $\mathbb{R}$ y $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(1)$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int_1^{x^2} f(t)dt}{\displaystyle\int_1^{x} f(t)dt}, & \text{si} \quad x \neq 1 \\ \\ a & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

(a) Demostrar que g es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Por hipótesis f es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto integrable en $[1, x]$ y en $[1, x^2]$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Entonces, por T.F.C., $\int\limits_1^{x^2} f(t)dt$ y $\int\limits_1^{x} f(f)dt$ son continuas. (0.7 puntos)

Además, como $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int\limits_1^{x} f(t)dt > 0$ $\forall x \neq 1$.

Se concluye que $\dfrac{\int\limits_1^{x^2} f(t)dt}{\int\limits_1^{x} f(t)dt}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (cuociente de continuas). Es decir, g es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. (0.3 puntos)

(b) Determinar el valor de a para que g sea continua en $x = 1$.
Para la continuidad de g en $x = 1$ debe ocurrir: $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = a$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\int\limits_1^{x^2} f(t)dt}{\int\limits_1^{x} f(t)dt} \overset{L'Hop}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2xf(x^2)}{f(x)} = \frac{2f(1)}{f(1)} = 2 \quad (f(1) \neq 0) \qquad \text{(1.5 puntos)}$$

Sigue que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = a \Rightarrow a = 2 = g(1)$ (0.5 puntos)

(c) Calcule $g'(1)$. Por definición

$$g'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{\int_1^{x^2} f(t)dt}{\int_1^{x} f(t)dt} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\int\limits_1^{x^2} f(t)dt - 2\int\limits_1^{x} f(t)dt}{(x-1)\int\limits_1^{x} f(t)dt} = \lim_{x \to 1} \frac{2xf(x^2) - 2f(x)}{\int\limits_1^{x} f(t)dt + (x-1)f(x)} =$$

(1.5 puntos)

$$L'Hop = \lim_{x \to 1} \frac{2f(x^2) + 4x^2 f'(x^2) - 2f'(x)}{2f(x) + (x-1)f'(x)} = \frac{2f(1) + 4f'(1) - 2f'(1)}{2f(1) + 0 \cdot x'(1)} = \frac{2f(1)}{2f(1)} = 1$$

(1.0 puntos)

donde $f'(1) = 0$ pues por hipótesis $x = 1$ es punto de máximo de f. Sigue que $g'(1) = 1$ (0.5 puntos)

P2.

(a) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} i2^{i/n}$. La suma puede escribirse como $\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=0}^{n-1} i2^{i/n} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}2^{i/n}\frac{1}{n}$ que es adaptable a una suma de Riemann con partición equiespaciada

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i = \frac{i}{n} \Rightarrow \begin{array}{c} a=0 \\ b-a=1 \end{array} \Rightarrow b = 1 \wedge f(x_i) = x_i 2^{x_i}$$

Sigue que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}2^{i/n}\frac{1}{n} = \int_0^1 x2^x dx = \int_0^1 xe^{x\ell n2}dx$$

(1.0 punto)

Por partes $u = x \to du = dx \quad dv = e^{x\ell n2}dx \to v = \frac{1}{\ell n2}e^{x\ell n2}$

Entonces:

$$\int_0^1 xe^{x\ell n2}dx = \frac{x}{\ell n2}e^{x\ell n2}\Big|_0^1 - \frac{1}{\ell n2}\int_0^1 e^{x\ell n2}dx = \frac{2}{\ell n2} - \frac{1}{(\ell n2)^2}2^{x\ell n2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{\ell n2} - \frac{1}{(\ell n2)^2}(2-1) = \frac{2}{\ell n2} - \frac{1}{(\ell n2)^2} = \frac{1}{\ell n2}\left[2 - \frac{1}{\ell n2}\right]$$

Sigue que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i2^{i/n} = \frac{1}{\ell n2}\left[2 - \frac{1}{\ell n2}\right]$$

(1.0 punto)

(b) Los planos π_1 y π_2 determinan sobre la superficie del cilindro el área del manto de un cilindro de altura h.

Area del Manto $= 2\pi Rh$ (sin necesidad de integrar). (0.5 puntos)

Para determinar el área que π_1 y π_2 determinan sobre el manto de la esfera, calculamos el área de la superficie de revolución del arco $\widehat{AB}$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$

$$S_{R_{aV\widehat{AB}}} = 2\pi\int_{x_A}^{x_B} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx; \quad \text{con} \quad f(x) = \sqrt{R^2-x^2}; \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Así

$$S_{Rev\widehat{AB}}\int\limits_{x_A}^{x_B}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx = 2\pi\int\limits_{x_A}^{x_B}\sqrt{R^2-x^2}-\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx$$

(1.0 punto)

$$\Rightarrow S_{R_{eV\widehat{AB}}} = 2\pi R\int\limits_{x_A}^{x_B}dx = 2\pi R(x_B-x_A), \qquad \text{pero} \qquad x_B - x_{A=h}$$

Sigue que $S_{Rev\widehat{AB}} = 2\pi Rh =$ Area Manto Cilindro. (0.5 puntos)

(c) g continua en $\mathbb{R} \wedge f(x) = \int\limits_0^x \operatorname{sen}(t)g(x-t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Sea

$$u = x-t, \quad d_u = -dt; \quad \begin{pmatrix} t=0 \to u=x \\ t=x \to u=0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$f(x) = -\int\limits_x^0 \operatorname{sen}(x-u)g(u)du = \int\limits_0^x \operatorname{sen}(x-u)g(u)du.$$

(0.5 puntos)

Así

$$f(x) = \int\limits_0^x (\operatorname{sen}x\cos u - \cos x \operatorname{sen}u)g(u)du = \operatorname{sen}x\int_0^x \cos(u)g(u)du - \cos x\int_0^x \operatorname{sen}ug(u)du)$$

con $\operatorname{sen}u$, $\cos u$, $g(u)$ continuas, f esta bien definida y es derivable (T.F.C.).

$$f'(x) = \cos x\int_0^x \cos ug(u)du + \operatorname{sen}x\cos xg(x) + \operatorname{sen}x\int_0^x \operatorname{sen}ug(u)du - \operatorname{sen}x\cos xg(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x\int_0^x \cos ug(u)du + \operatorname{sen}x\int_0^x \operatorname{sen}ug(u)du).$$

Nuevamente, por la continuidad de $\operatorname{sen}u$, $\cos u$, $g(u)$, f' es derivable (T.F.C.), es decir f admite segunda derivada. (0.7 puntos)

Esta es:

$$f''(x) = -\operatorname{sen}x\int\limits_0^x \cos ug(u)du + \cos^2 xg(x) + \cos x\int_0^x \operatorname{sen}ug(u)du + \operatorname{sen}^2 xg(x)$$

$$\Rightarrow f''(x) = g(x)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + \underbrace{\cos x\int_0^x \operatorname{sen}ug(u)du - \operatorname{sen}x\int_0^x \cos ug(u)du}_{=f(x)}$$

$$\Rightarrow f''(x) = g(x) - f(x)$$

Concluimos $f''(x) + f(x) = g(x)$. (0.8 puntos)

P3.

(a) El área bajo $f(x)$ en $[0,a]$ será:

$$A = \int_0^a \frac{\ell n(1+ax)}{1+x^2}dx \qquad \text{Sustitución} \qquad x = \frac{a-u}{1+au} \left\{ \begin{array}{l} x=0 \to u=a \\ x=a \to u=0 \end{array} \right.$$

$dx = \frac{-(1+au)-a(a-u)}{(1+au)^2}du = -\frac{1+a^2}{(1+au)^2}du.$ (0.5 puntos)

Entonces

$$A = -\int_a^0 \frac{\ell n\left[1+a\frac{a-u}{1+au}\right]}{1+\left(\frac{a-u}{1+au}\right)^2} \cdot \frac{1+a^2}{(1+au)^2} = \int_0^a \frac{\ell n\left(\frac{1+a^2}{1+au}\right)(1+a^2)}{\underbrace{\underbrace{(1+au)^2+(a-u)^2}_{1+a^2u^2+a^2+u^2}}_{(1+a^2)(1+u^2)}}du$$

$$\Rightarrow A = \int_0^a \frac{\ell n\left(\frac{1+a^2}{1+au}\right)(1+a^2)}{(1+a^2)(1+u^2)}du$$

(0.5 puntos)

$$\Rightarrow A = \int_0^a \frac{\ell n(1+a^2)-\ell n(1+au)}{1+u^2}du = \int_0^a \frac{\ell n(1+a^2)}{1+u^2}du - \underbrace{\int_0^a \frac{\ell n(1+au)}{1+u^2}du}_{A}$$

(1.0 punto)

Así,

$$A = \ell n(1+a^2)\int_0^a \frac{du}{1+u^2} - A = \ell n(1+a^2)\operatorname{arc\,tg} u\Big|_0^a - A$$

$$\Rightarrow 2A = \ell n(1+a^2)\operatorname{arc\,tg}(a) \therefore A = \frac{1}{2}\ell n(1+a^2)\operatorname{arc\,tg} a$$

(1.0 punto)

(b) Area $= A = \int_{-1}^{2} |f(x)-g(x)|dx$

$\Rightarrow A = \int_{-1}^{0} (f(x)-g(x)dx + \int_0^2 -(f(x)-g(x))dx$

$\Rightarrow A = \int_{-1}^{0} (-x-\operatorname{arc\,tg} x)dx + \int_0^2 -(-x-\operatorname{arc\,tg} x)dx$ (1.0 punto)

Así,

$$A=\int_{-1}^{0}(-x-\operatorname{arc\,tg}x)dx+\int_{0}^{2}(x+\operatorname{arc\,tg}x)dx=\left|-\frac{1}{2}x^2\right|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\operatorname{arc\,tg}x dx+\left|\frac{1}{2}x^2\right|_{0}^{2}+\int_{0}^{2}\operatorname{arc\,tg}x dx$$

$$=\frac{1}{2}+2-\int_{-1}^{0}\operatorname{arc\,tg}x dx+\int_{0}^{2}\operatorname{arc\,tg}x dx \quad \text{y} \quad \int \operatorname{arc\,tg}x dx=x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ell n(1+x^2)$$

Por partes

$$\begin{cases} u=\operatorname{arc\,tg}x \to du=\frac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx \to v=x \end{cases}$$

(1.5 puntos)

$$A=\frac{1}{2}+2-\left(x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ell n(1+x^2)\right)_{-1}^{0}+\left(x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ell n(1+x^2)\right)_{0}^{2}=\frac{5}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ell n2+2\operatorname{arc\,tg}2-\frac{1}{2}\ell n5$$

(0.5 punto)

Control 2

P1|

a) Considere las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \sin(x)$, y las constantes $a = 0$, $b = \pi$. Encuentre el valor de ξ que verifica la ecuacion.

$$\int_a^b f(x)\sin(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx \quad (1)$$

b) Sean f, g, funciones continuas en $\mathbb{R}$, con f monotona, derivable y con derivada continua. Demuestre que para $\forall a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ existe $\xi \in [a, b]$ demuestre que existe $\xi \in [a, b]$ que satisface la ecuacion (1) de la parte a).

Indicacion: Defina $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ e integre por partes.

P2|

a) Dado $n \in \mathbb{N}$, calcule las integrales

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx \text{ y } \int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx$$

y verifique que ambas tienden a 0 cuando $n \to \infty$

b) Para demostrar que, en general

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sin(n\pi x)\,f(x) = 0, \ (2)$$

para toda funcion f derivable, con derivada acotada, defina $I_n = \int_0^1 \sin(n\pi x)\,f(x)\,dx$

y realice lo siguiente:

b1) Usando el cambio de variable $x = u + \frac{1}{n}$, pruebe que

$$I_n = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \sin(n\pi x) f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx - \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \sin(n\pi x) f\left(x + \frac{1}{n}\right) - \int_{0}^{1} \sin(n\pi x) f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx$$

$b2$) Usando lo anterior y sumando las dos formas de I_n, pruebe que:

$|2I_n| \leqslant \frac{2}{n} M(|f|) + \frac{1}{n} M(|f'|)$,

donde $M(|f|)$ y $M(|f'|)$ son los maximos de $|f|$ y $|f'|$ respectivamente, con esto concluya (2)

P3|

a) Demuestre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)}$. Tomando logaritmo y usando sumas de riemann, calcule $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$

b) Considere $I_{n,m} = \int_0^1 (1-x)^x x^m dx$, con n, $m \in \mathbb{N}$

b1) Pruebe que, $\forall n \geqslant 1$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $I_{n,m} = \frac{n}{m+1} I_{n-1,m+1}$

b2) Use lo anterior para calcular explicitamente el valor de $I_{n,m}$

c) Calcule la primitiva $\int \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2+1)} dx$

Tiempo: 3 Horas|

Cálculo Diferencial e Integral - Control 2

Pauta Problema 1

a) $f(x)=x$, $g(x)=\operatorname{sen} x$, $a=0$, $b=\pi$

Reemplazando en la ecuación (1) queda

$$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x \, dx = 0 \cdot \int_0^{\xi} \operatorname{sen} x \, dx + \pi \cdot \int_{\xi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \pi \int_{\xi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \pi (-\cos x)\Big|_{\xi}^{\pi}$$

Por Partes $u = x \rightarrow du = dx$

$dv = \operatorname{sen} x \, dx \rightarrow v = -\cos x$

Entonces $\underbrace{-x \cos x \Big|_0^{\pi}}_{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx = \pi(1+\cos\xi) \longrightarrow$ 1.5

$\pi + \cancel{\operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi}}^{\to 0} = \pi(1+\cos\xi) \Rightarrow 1+\cos\xi = 1 \Rightarrow \cos\xi = 0$

así, $\xi = \frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$ $\longrightarrow$ 0.5

b) Según indicación, sea $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ donde g es continua y por lo tanto G es derivable con $G'(x) = g(x)$ (T.F.C.)

Entonces $\int_a^b f(x) g(x)\, dx = \int_a^b f(x) G'(x)\, dx$

Partes: $u = f(x) \rightarrow du = f'(x)dx$

1.0 $\longrightarrow$ $dv = G'(x)dx \rightarrow v = G(x)$

Sigue que $\int_a^b f(x) G'(x)\, dx = f(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x) f'(x)\, dx$

0.5 $\longrightarrow$ (como $G(a) = \int_a^a g = 0$) $= f(b)G(b) - f(a)\cancel{G(a)}^{\to 0} - \int_a^b G(x) f'(x)\, dx$

Para $\int_a^b G(x) f'(x) dx$ donde G es continua y f' continua y por lo tanto integrable y de signo constante (monótona) se puede

0.5 $\longrightarrow$ aplicar el TVMG para integrales, es decir $\exists \xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b G(x) f'(x) dx = G(\xi) \int_a^b f'(x) dx = G(\xi) (f(x))\Big|_a^b = G(\xi)(f(b) - f(a))$$

1.0 $\longrightarrow$

Así $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)G(b) - G(\xi)(f(b)-f(a))$

$$= f(a)G(\xi) + f(b)\underbrace{(G(b)-G(\xi))}_{\int_\xi^b g(x)\,dx}$$

Se concluye que

(1.0)

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx$$

Pauta Problema 2

a) $$\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi)-1\right) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

Claramente $\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\longrightarrow$ (0.5)

$$\int_0^1 x\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx = -\frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx$$

Partes $u = x \to du = dx$

$dv = \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \to v = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)$

$$= -\frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\cancel{\operatorname{sen}(n\pi x)}\Big|_0^1 = -\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

También es inmediato que $\int_0^1 x\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\longrightarrow$ (1.5)

b) b1) $I_n = \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) f(x)\,dx$ con el cambio $x = u + \frac{1}{n}$, $dx = du$

$$I_n = \int_{-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \operatorname{sen}\left[n\pi\left(u+\tfrac{1}{n}\right)\right] f\left(u+\tfrac{1}{n}\right)du = \int_{-1/n}^{1-1/n} \operatorname{sen}(n\pi u + \pi) f\left(u+\tfrac{1}{n}\right)du$$

$$= -\int_{-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \operatorname{sen}(n\pi u) f\left(u+\tfrac{1}{n}\right)du = \int_{1-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n}} \operatorname{sen}(n\pi u) f\left(u+\tfrac{1}{n}\right)du \longrightarrow (0.5)$$

y esta última integral se puede descomponer como

$$I_n = \int_{1-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n}} = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} + \int_1^0 + \int_0^{-\frac{1}{n}}$$ y arreglando signos queda

$$I_n = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x) f\left(x+\tfrac{1}{n}\right)dx - \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \operatorname{sen}(n\pi x) f\left(x+\tfrac{1}{n}\right)dx - \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) f\left(x+\tfrac{1}{n}\right)dx \longrightarrow (1.5)$$

b2) Sumando esta forma de I_n con la original se tiene

$$2I_n = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \operatorname{sen}(n\pi x) f\left(x+\tfrac{1}{n}\right)dx - \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \operatorname{sen}(n\pi x) f\left(x+\tfrac{1}{n}\right)dx - \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) f\left(x+\tfrac{1}{n}\right)dx + \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) f(x)\,d$$

y agrupando las dos últimas integrales en una

$$2I_m = \int_{1-\frac{1}{m}}^{1} \operatorname{sen}(m\pi x) f(x+\tfrac{1}{m})\,dx - \int_{-\frac{1}{m}}^{0} \operatorname{sen}(m\pi x) f(x+\tfrac{1}{m})\,dx - \int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi x)\left[f(x+\tfrac{1}{m}) - f(x)\right]dx \longrightarrow 0.5$$

En la última integral, como f es continua en $[x, x+\frac{1}{m}]$ y derivable en $(x, x+\frac{1}{m})$, entonces por TVM (para derivadas) $\exists\, \xi \in (x, x+\frac{1}{m})$ tal que $f(x+\frac{1}{m}) - f(x) = \frac{1}{m} f'(\xi)$, entonces

$$2I_m = \int_{1-\frac{1}{m}}^{1} \operatorname{sen}(m\pi x) f(x+\tfrac{1}{m})\,dx - \int_{-\frac{1}{m}}^{0} \operatorname{sen}(m\pi x) f(x+\tfrac{1}{m})\,dx - \frac{1}{m}\int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi x) f'(\xi)\,dx \longrightarrow 0.5$$

Finalmente, acotando $|2I_m|$ por la desigualdad triangular, las integrales por $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$ y considerando $|\operatorname{sen}(m\pi x)| \le 1$, $|f| \le M(|f|)$ y $|f'| \le M(|f'|)$ queda. $\longrightarrow 0.5$

$$|2I_m| \le \int_{1-\frac{1}{m}}^{1} |\operatorname{sen}(m\pi x)|\,|f(x+\tfrac{1}{m})|\,dx + \int_{-\frac{1}{m}}^{0} |\operatorname{sen}(m\pi x)|\,|f(x+\tfrac{1}{m})|\,dx + \frac{1}{m}\int_0^1 |\operatorname{sen}(m\pi x)|\,|f'(\xi)|\,dx$$

$$\le M(|f|)\int_{1-\frac{1}{m}}^{1} dx + M(|f|)\int_{-\frac{1}{m}}^{0} dx + \frac{M(|f'|)}{m}\int_0^1 dx$$

$$= \frac{M(|f|)}{m} + \frac{M(|f|)}{m} + \frac{M(|f'|)}{m} = \frac{2}{m}M(|f|) + \frac{1}{m}M(|f'|)$$

Finalmente se concluye $\quad 0 \le |I_m| \le \dfrac{M(|f|)}{m} + \dfrac{M(|f'|)}{2m}$

de donde $\quad I_m = \int_0^1 \operatorname{sen}(m\pi x) f(x)\,dx \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.5$

Pauta Problema 3

a) $\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n\cdot n\cdot n\cdots n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$

Así $\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)}$

Entonces $\ln \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \ln\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) \longrightarrow 0.5$

Entonces $\lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

Este último es una suma de Riemann donde $x_i = 1+\frac{i}{n}$, $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$

de donde $b-a=1$, $a=1$, $b=2$

Así $\lim\left[\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\right)\right] = \int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1$

Partes $u=\ln x \to du=\frac{dx}{x}$

$dv = dx \to v = x$ $\longrightarrow 1.0$

Recordar que si $\ln(s_n)\to L \Rightarrow s_n \to e^L$

Entonces $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}\right) = e^{2\ln 2-1} = e^{\ln 4 - 1} = \frac{4}{e} \longrightarrow 0.5$

b) b1) $I_{n,m} = \int_0^1 (1-x)^n x^m\,dx = \cancel{\frac{x^{m+1}}{m+1}(1-x)^n\Big|_0^1}^{\,0} + \frac{n}{m+1}\int_0^1 (1-x)^{n-1}x^{m+1}\,dx$

Partes $u=(1-x)^n \to du = -n(1-x)^{n-1}$

$dv = x^m dx \to v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$

Sigue que $I_{n,m} = \frac{n}{m+1} I_{n-1,m+1} \longrightarrow 1.0$

b2) $I_{n,m} = \frac{n}{m+1}I_{n-1,m+1} = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}I_{n-2,m+2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}I_{n-3,m+3} =$

$= \cdots = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(m+1)\cdots(m+n)}I_{0,m+n} = \frac{n!}{(m+1)\cdots(m+n)}\int_0^1 x^{m+n}\,dx \longrightarrow 0.5$

Así $I_{n,m} = \dfrac{n!}{(m+1)\cdots(m+n)} \cdot \dfrac{x^{n+m+1}}{m+n+1}\Bigg|_0^1 = \dfrac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)} \dfrac{\cdot m!}{\cdot m!}$

$$I_{n,m} = \frac{n!\,m!}{(m+n+1)!} \longrightarrow 0.5$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x(x^2+1)}\,dx$. Fracciones Parciales

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{x^2-x+1}{x(x^2+1)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} A+B=1 \\ C=-1 \\ A=1\ ,\ B=0 \end{array} \right.$$

0.5 $\longrightarrow$

1.5 $\longrightarrow$ $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \ln|x| - \operatorname{arctg} x + C$

Alternativa.

$$\int \frac{x^2-x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left[\frac{\cancel{x^2+1}}{x\cancel{(x^2+1)}} - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x^2+1)}\right] dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \ln|x| - \operatorname{arctg} x + C$$

2.0 ptos

Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1002 Cálculo Diferencial E Integral

Control 2

Profesores: Raul Uribe S. y Felipe Célèry C.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Francisco Collarte O.
Semestre: 03-2010 Jueves 6 de Enero de 2011

P1.-
(a) (*2.0 pts.*) Calcular el siguiente límite mediante la integral definida, identificando claramente la función y el intervalo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{\sqrt{n^4+i^4}}$$

(b) (*2.0 pts.*) Probar que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se verifica:

$$\int_0^{\cos^2(x)} \operatorname{arc}\cos(\sqrt{t})dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2(x)} \operatorname{arc}\operatorname{sen}(\sqrt{t})dt = \frac{\pi}{4}$$

Ind: Probar que el lado izquierdo no depende de x (use el 1° TFC) , y para su valor integre por partes ambas integrales considerando $x = \frac{\pi}{4}$.

(c) (*2.0 pts.*) Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^{x^2} e^{t^2}dt}{1-\cos(x)}$$

Solución:
a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{\sqrt{n^4+i^4}}$$

Dividiendo numerador y denominador por n^2, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^3}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^4}} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

Luego, la función es $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$ y el intervalo es $[0,1]$ (**0.3 pts**), así:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^3}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^4}} = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx \quad \textbf{(0,2 pts)}$$

Realizando el cambio de variables: $u = 1+x^4 \Rightarrow du = 4x^3dx$, los límites también cambian (algunas personas volvieron a la variable y luego evaluaron, eso obviamente se considerará correcto), Si $x=0 \to u=1$ y $x=1 \to u=2$ la integral queda:

$$\frac{1}{4}\int_1^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = \left[\frac{1}{2}\sqrt{u}\right]_1^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{\sqrt{n^4+i^4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad \textbf{(1,0 pts)}$$

b) Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{\cos^2(x)} \operatorname{arc\,cos}(\sqrt{t})dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2(x)} \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{t})dt$ aplicamos el 1° TFC, pues arc cos y arc sen son continuas en $[0,1]$, pues si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\cos^2(x)$ y $\operatorname{sen}^2(x)$ van entre $[0,1]$, luego **(0,5 pts)**:

$$F'(x) = \operatorname{arc\,cos}(\cos(x)) \cdot (-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)) + \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}(x)) \cdot (2\operatorname{sen}(x)\cos(x))$$

$$F'(x) = x(-2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)) = 0$$

Luego F es constante en $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. **(0,5 pts)**. Usando la indicación si $x = \frac{\pi}{4}$, luego:

$$F(\frac{\pi}{4}) = F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arc\,cos}(\sqrt{t}) + \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{t})dt$$

Integrando por partes:

$$u = \operatorname{arc\,cos}(\sqrt{t}) + \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{t}) \quad du = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{1-t}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{1-t}} = 0 \quad v = t \quad dv = dt \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

Finalmente:

$$F(x) = \left[t(\operatorname{arc\,cos}(\sqrt{t}) + \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{t}))\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \textbf{(0,5 pts)}$$

c) El límite es de la forma $\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hopital y el 1° TFC, ya que e^{t^2} es continua en $\mathbb{R}$ (en particular el intervalo $[0, x^2]$). **(0,4 pts)**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^{x^2} e^{t^2}dt}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{t^2}dt + x(2x)e^{x^4}}{\operatorname{sen}(x)} \quad \textbf{(0,8 pts)}$$

Nuevamente aplicamos L'Hopital y el 1° TFC:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^{t^2}dt + x(2x)e^{x^4}}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(2x)e^{x^4} + 4xe^{x^4} + 2x^2 \cdot 4x^3 e^{x^4}}{\cos(x)} = \frac{0}{1} = 0 \quad \textbf{(0,8 pts)}$$

Así:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^{x^2} e^{t^2}dt}{1-\cos(x)} = 0$$

P2.-

(a) Calcular las siguientes primitivas e integrales (*1.5 pts. c/u*):

$$\text{i)} \int \ln(x+\sqrt{x})dx \quad \text{ii)} \int \frac{\sec^2(x)dx}{(4-\tan^2(x))^{\frac{3}{2}}} \quad \textit{Ind: } :u = \tan(x) \quad \text{iii)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3+\operatorname{sen}(x)}$$

(b) (*1.5 pts.*) Demostrar que si $I_n = \int \sec^n(x)dx$ se cumple

$$I_n = \frac{\sec^{n-2}(x)\cdot\tan(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\cdot I_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \quad n \in \mathbb{N}$$

Solución:

a)

i) Desarrollando por partes, con $U = \ln(x+\sqrt{x})$ y $dV = dx$, lo que implica que $dU = \frac{1}{x+\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ y $V = x$. Así

$$I = x\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \int x\frac{1}{x+\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \int \frac{2x^{3/2}+x}{2x^{3/2}+2x}dx$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - \int \frac{2x^{3/2}+2x}{2x^{3/2}+2x}dx + \int \frac{x}{2x^{3/2}+2x}dx = x\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - x + \int \frac{x}{2x^{3/2}+2x}dx$$

Ahora, para calcular la última integral se tiene, al aplicar cambio de variables $p = x^{1/2}$, lo que implica $dp = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2pdp = dx$

$$\int \frac{x}{2x^{3/2}+2x}dx = \int \frac{p^2}{2p^3+2p^2}2pdp = \int \frac{p}{p+1}dp = p - \ln(p+1) = \sqrt{x} - \ln\left(\sqrt{x}+1\right)$$

Así, se tiene que

$$\int \ln\left(x+\sqrt{x}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{x}\right) - x + \sqrt{x} - \ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$$

ii) *(1,5 ptos)* $J = \int \frac{\sec^2(x)}{(4-\tan^2(x))^{3/2}}dx$

Solución: Usando el cambio de variables sugerido $u = \tan(x)$, se tiene $du = \sec^2(x)\,dx$. Así, la integral queda como

$$J = \int \frac{du}{(4-u^2)^{3/2}}$$

Ahora, aplicando el cambio de variable $u = 2\sin(p)$, con $du = 2\cos(p)\,dp$, se tiene

$$J = \int \frac{2\cos(p)}{\left(4-4\sin^2(p)\right)^{3/2}}dp = \int \frac{\cos(p)}{\cos^3(p)}dp = \int \frac{1}{\cos^2(p)}dp = \tan(p) + C$$

Por lo cual, volviendo a la variable original, se tiene que

$$J = \tan\left(\arcsin\left(\frac{\tan(x)}{2}\right)\right) + C$$

iii) *(1,5 ptos)* $K = \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{3+\sin(x)}$

Solución: Usando el cambio de variables $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, con $du = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$, se tiene que dejar estas en función de u. Se deduce del cambio de variables que

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}, \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \Rightarrow \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) = u^2+1$$

Usando las fórmulas del seno y el coseno del ángulo doble $\sin(2p) = 2\sin(p)\cos(p)$ y $\cos(2p) = \cos^2(p) - \sin^2(p)$, se tiene que

$$\sin(x) = \frac{2u}{u^2+1}, \cos(x) = \frac{1-u^2}{u^2+1}$$

Por lo cual, la integral queda como

$$\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{3+\frac{2u}{u^2+1}} \cdot \frac{2du}{u^2+1} = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2}{3u^2+3+2u} du$$

Completando cuadrados, notando que $\left(\sqrt{3}u + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3u^2 + 2u + \frac{1}{3}$, se tiene que

$$K = 2 \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{1}{\left(\sqrt{3}u + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{8}{3}} du$$

Haciendo cambio de variables $p = \sqrt{3}u + \frac{1}{\sqrt{3}}$, $dp = \sqrt{3}du$, se tiene

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{1/\sqrt{3}}^{1+1/\sqrt{3}} \frac{1}{p^2+\frac{8}{3}} dp = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{1/\sqrt{3}}^{1+1/\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{8}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}p\right)^2+1\right)} dp = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{3}{8} \int_{1/\sqrt{3}}^{1+1/\sqrt{3}} \frac{1}{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}p\right)^2+1\right)} dp$$

Volvemos a hacer un cambio de variables $h = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}p$, $dh = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}dp$. Se tiene aquí que

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{3}{8} \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \int_{1/\sqrt{8}}^{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{8}}} \frac{dh}{h^2+1} = \frac{2}{\sqrt{8}} \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{8}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\right)$$

b) *(1,5 ptos)* Demostrar que si $I_n = \int \sec^n(x)\, dx$, entonces se cumple que, para todo $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \frac{\sec^{n-2}(x)\tan(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

Solución: Recordando que $\sec^n(x) = \sec^{n-2}(x)\sec^2(x)$y usando integración por partes, con $U = \sec^{n-2}(x)$ y $dV = \sec^2(x)$ tal que $dU = (n-2)\sec^{n-3}(x) \cdot (\sec(x))' = (n-2)\sec^{n-2}(x) \cdot \tan(x)$ y $V = \tan(x)$, se tiene que

$$I_n = \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2)\int \tan^2(x)\sec^{n-2}(x)\, dx$$

Recordando además que $\sec^2(x) = 1 - \tan^2(x)$, se tiene que

$$I_n = \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2)\int \left(1-\sec^2(x)\right)\sec^{n-2}(x)\, dx$$

$$= I_n = \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2)\left(\int \sec^{n-2}(x)\, dx - \int \sec^n(x)\, dx\right)$$

Así se obtiene que

$$I_n = \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2)(I_{n-2} - I_n)$$

Reordenando, es posible llegar a lo pedido

$$I_n = \frac{\sec^{n-2}(x)\tan(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$$

P3.-

a) (2,0 Puntos) Sea f continua en $[0,a]$. Comprobar que:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

<u>Solución</u>: Como f es continua en $[0,a]$, entonces es integrable en $[0,a]$. (0,2 Puntos) Notemos que, haciendo el cambio de variable $u = a - x$ entonces $du = -dx$ y:

$$\int_0^a f(a-x)dx = -\int_a^0 f(u)du = \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(x)dx$$

Lo último pues la variable de integración es muda, así se prueba lo deseado. (1,8 Puntos).

b) (4,0 Puntos) Usando la parte anterior, calcule:

$$\int_0^\pi \frac{x\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$$

<u>Solución</u>: Obviamente la función involucrada en este caso satisface las hipótesis de la parte a), por lo que podemos aplicarla, así:

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin^3(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx$$

Notando que (vía seno y coseno de la suma, o simplemente con un dibujo):

$$\sin(\pi-x) = \sin(x) \quad \cos(\pi-x) = -\cos(x)$$

(1 Punto)
Entonces:

$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin^3(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$$

esta última integral, la podemos separar en 2:

$$I = \int_0^\pi \frac{\pi\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx - \int_0^\pi \frac{x\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int_0^\pi \frac{\pi\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx - I$$

es decir:

$$2I = \pi\int_0^\pi \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx$$

(1 Punto).
Calculemos esta última integral:

$$J = \int_0^\pi \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int_0^\pi \frac{\sin(x)\cdot\sin^2(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int_0^\pi \frac{\sin(x)\cdot(1-\cos^2(x))}{1+\cos^2(x)}dx$$

Haciendo el cambio de variable $u = \cos(x)$ entonces: $du = -\sin(x)dx$

$$J = -\int_1^{-1} \frac{1-u^2}{1+u^2}du = 2\int_0^1 \frac{1-u^2}{1+u^2}du = 2\int_0^1 \frac{1-u^2+(2-2)}{1+u^2}du$$

$$J = 2\left(\int_0^1 \frac{-1-u^2}{1+u^2}du + \int_0^1 \frac{2}{1+u^2}du\right) = 2\left(-\int_0^1 du + \int_0^1 \frac{2}{1+u^2}du\right)$$

(1 Punto)

$$J = 2(-1+2\arctan(1)-2\arctan(0)) = 2(-1+2\frac{\pi}{4}) = (\pi-2)$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{\pi}{2}\cdot J = \frac{\pi}{2}\cdot(\pi-2)$$

(1 Punto)

Control 2

P1. Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

a) (1,5 ptos.) Para la partición de $[0,2]$ dada por $P = \{0,1,2\}$, demuestre que $s(f,P) = 1$ y que $S(f,P) = 4$.

b) (3,0 ptos.) Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\delta \in (0,1)$ considere la partición dada por

$$P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}, 1+\delta, 2\}.$$

Calcule $s(f,P)$, $S(f,P)$ y demuestre que $S(f,P) - s(f,P) = \frac{2}{n} + \delta$.

c) (1,5 ptos.) Usando la parte b) y la condición de Riemann concluya que f es integrable en [0,2].

P2. (i) (2,0 ptos.) Identifique la sumatoria $S_n = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{(3n+2i)^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$ como una suma de Riemann y calcule $\lim_{n\to\infty} S_n$.

(ii) (2,0 ptos.) Considere $I_n(x) = \int_0^x y^n (y^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} dy$. Aplique la técnica de integración por partes para demostrar que:

$$(n+2)I_{n+2}(x) = x^{n+1}\sqrt{x^2+a^2} - (n+1)a^2 I_n(x), \quad n \geq 0.$$

Indicación: Note que I_{n+2} puede escribirse como $I_{n+2}(x) = \int_0^x y^{n+1} \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} dy$.

(iii) (2,0 ptos.) Calcule

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (x-1)\operatorname{sen}(t^2)dt}{\int_1^{x^2} \operatorname{sen}(t^2-1)dt}.$$

P3. Considere las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas para $x \in [0,\pi]$.

a) (1,0 pto.) Demuestre que $\forall x \in [0,\pi]$, $g(x) \geq f(x)$.

Indicación: Verifique que la función $g(x) - f(x)$ es cóncava en $[0,\pi]$ y concluya.

b) (5,0 ptos.) Para la región R del primer cuadrante definida por

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x \in [0,\pi] \wedge y \in [f(x), g(x)]\}$$

se pide calcular el área de R y calcular los volúmnes de los sólidos engendrados por la rotación de R en torno al eje OX y en torno al eje OY.

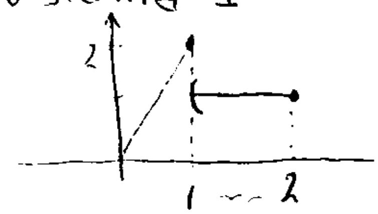
Formulario:

$$A = \int_a^b h(x)dx, \quad V = \pi\int_a^b h^2(x)dx, \quad V = 2\pi\int_a^b xh(x)dx, \quad V = \int_a^b A(x)dx$$

Tiempo 3,0 horas

Pauta Problema 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$



a) $P = \{0,1,2\}$ partición de $[0,2]$ demostrar que $s(f,P) = 1$; $S(f,P) = 4$

0.5 Para $x \in [0,1]$ $\begin{cases} \min\{f(x)\} = \inf\{f(x)\} = m_i(f) = 0 \\ \max\{f(x)\} = \sup\{f(x)\} = M_i(f) = 2 \end{cases}$ $\Delta x_i = 1 - 0 = 1$

0.5 Para $x \in (1,2]$ $\begin{cases} \min\{f(x)\} = \inf\{f(x)\} = m_i(f) = 1 \\ \sup\{f(x)\} = M_i(f) = 2 \end{cases}$ $\Delta x_i = 2 - 1 = 1$

Así, $s(f,P) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$

0.5 $S(f,P) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$

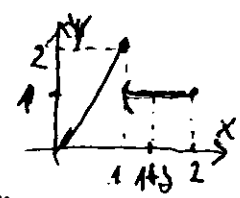
b) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\delta \in (0,1)$, $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \overset{1}{\frac{n}{n}}, 1+\delta, 2\}$

Para $x \in [0,1]$, $x_i = \frac{i}{n}$, $\Delta x_i = \frac{1}{n}$, $f(x) = 2x$

0.5 $m_i(f) = f(x_{i-1}) = 2\frac{i-1}{n}$; $M_i(f) = f(x_i) = 2\frac{i}{n}$ (f creciente en $[0,1]$)

Para $x \in (1,2]$; $m_i(f) = 1$, $M_i(f) = \sup\{f(x) / x \in [1, 1+\delta]\} = 2$

0.5 $M_i(f) = \sup\{f(x) / x \in [1+\delta, 2]\} = 1$



Entonces $s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 2\frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot ((1+\delta) - 1) + 1 \cdot (2 - (1+\delta)) = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) + \cancel{\delta} + 1 - \cancel{\delta}$

1.0 $\Rightarrow s(f,P) = \frac{2}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i + 1 = \frac{\cancel{2}}{n^2}\frac{(n-1)\cdot \cancel{n}}{\cancel{2}} + 1 = \frac{n-1}{n} + 1 = 2 - \frac{1}{n}$

$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 2\frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} + 2 \cdot [(1+\delta) - 1] + 1 \cdot [2 - (1+\delta)] = \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + 2\delta + 1 - \delta$

$\Rightarrow S(f,P) = \frac{\cancel{2}}{n^2}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + 1 + \delta = \frac{n+1}{n} + 1 + \delta = 2 + \delta + \frac{1}{n}$

1.0 Así, $S(f,P) - s(f,P) = (2 + \delta + \frac{1}{n}) - (2 - \frac{1}{n}) = \delta + \frac{2}{n}$

c) · La condición de Riemann establece que f es integrable en $[0,2]$ ssi $(\forall \varepsilon>0)\ \exists P \in \mathcal{P}_{[0,2]}$; $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$

Para usar (b), se sabe que la partición P allí definida es tal que $S(f,P)-s(f,P)=\delta+\frac{2}{n}$

(0.7) Bastará entonces δ y $n\in\mathbb{N}$ tales que $\delta+\frac{2}{n}<\varepsilon$

Por ejemplo, $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$ asumiendo que $0<\varepsilon<2$ con lo cual $\delta\in(0,1)$ y $\frac{2}{n}=\frac{\varepsilon}{4}$, es decir $\frac{1}{n}\leq\frac{\varepsilon}{8}$ o bien que $n\geq\frac{8}{\varepsilon}$.

Con esto, $S(f,P)-s(f,P)=\delta+\frac{2}{n}=\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

(0.8) para cualquier $\varepsilon>0$ dado.

Pauta Problema 2

i) $\Delta_n = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{(3n+2i)^p}{n^{p+1}}, \ p \in \mathbb{N}$. Se puede escribir como

$$\Delta_n = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\cancel{n^p}\left(3+2\frac{i}{n}\right)^p}{\cancel{n^p}\cdot n} = \sum_{i=1}^{n}\left(3+2\frac{i}{n}\right)^p\frac{2}{n}$$

. Identificándola como suma de Riemann se tiene

(1.0) $f(x_i) = x_i^p$ $\quad \left\{\begin{array}{l} x_i = a + \frac{b-a}{n}i = 3 + \frac{2}{n}i \\ \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b-a=2 \\ a=3 \\ b=5 \end{array}$

(1.0) Así, $\lim_{n\to\infty}(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{i=1}^{n}\frac{(3n+2i)^p}{n^{p+1}} = \int_3^5 x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_3^5 = \frac{5^{p+1}-3^{p+1}}{p+1}$

ii) Usando la indicación $I_{n+2}(x) = \int_0^x y^{n+2}\frac{dy}{\sqrt{y^2+a^2}} = \int_0^x y^{n+1}\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\,dy$

Por partes $\quad u = y^{n+1} \to du = (n+1)y^n\,dy$

$\qquad dv = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}\,dy \to v = \sqrt{a^2+y^2}$

(1.0) Así $\quad I_{n+2}(x) = y^{n+1}\sqrt{a^2+y^2}\Big|_0^x - (n+1)\int_0^x y^n\sqrt{a^2+y^2}\,dy = x^{n+1}\sqrt{a^2+x^2} - (n+1)\int_0^x\frac{y^n(a^2+y^2)}{\sqrt{a^2+y^2}}\,dy$

$$\Rightarrow I_{n+2}(x) = x^{n+1}\sqrt{a^2+x^2} - (n+1)\left[a^2\underbrace{\int_0^x\frac{y^n}{\sqrt{a^2+y^2}}\,dy}_{I_n} + \underbrace{\int_0^x\frac{y^{n+2}}{\sqrt{a^2+y^2}}\,dy}_{I_{n+2}}\right]$$

(1.0) Entonces $I_{n+2}(x) = x^{n+1}\sqrt{a^2+x^2} - (n+1)a^2 I_n(x) - (n+1)I_{n+2}(x)$

$$\Rightarrow (n+2)I_{n+2}(x) = x^{n+1}\sqrt{x^2+a^2} - (n+1)a^2 I_n(x).$$

iii) (1.0) $\lim \frac{\int_1^x (x-1)\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt}{\int_1^{x^2}\mathrm{sen}(t^2-1)\,dt} = \frac{(x-1)\int_1^x \mathrm{sen}(t^2)\,dt}{\int_1^{x^2}\mathrm{sen}(t^2-1)\,dt} \overset{L'H\ \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to1}\frac{\int_1^x \mathrm{sen}(t^2)\,dt + (x-1)\,\mathrm{sen}(x^2)}{2x\,\mathrm{sen}(x^4-1)}$

(1.0) $\overset{L'H\ \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to1}\frac{2\,\mathrm{sen}(x^2) + (x-1)2x\cos(x^2)}{2\,\mathrm{sen}(x^4-1) + 2x\cdot4x^3\cos(x^4-1)} = \frac{2\,\mathrm{sen}(1)}{8} = \frac{\mathrm{sen}(1)}{4}$

Pauta Problema 3

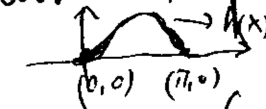
a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \pi x - x^2$ definidas en $[0,\pi]$

Demostrar que $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0,\pi]$

Sea $h(x) = g(x) - f(x) = (\pi x - x^2) - \operatorname{sen} x$, $x \in [0,\pi]$

$h'(x) = \pi - 2x - \cos x$; $h''(x) = -2 + \operatorname{sen} x < 0 \quad (-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1)$

0,5 $\therefore$ Entonces $g(x) - f(x)$ es cóncava en $[0,\pi]$, es decir, toda recta que une dos puntos de $h(x)$ en $[0,\pi]$ queda bajo la curva. En especial el eje OX entre $O(0,0)$ y $A(\pi,0)$ queda bajo $h(x)$.



0,5 Entonces $\forall x \in [0,\pi]$ $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ (eje OX) $\Rightarrow g(x) \geq f(x)$.

b) Según el punto (a), el esquema de las curvas es: $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0,\pi]$

$$A_{rea}(R) = \int_0^{\pi} (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^{\pi} (\pi x - x^2 - \operatorname{sen} x)\,dx = \left[\pi \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}x^3 + \cos x\right]_0^{\pi}$$

1,0

$$A(R) = \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} - 1 - 1 = \frac{\pi^3}{6} - 2$$

$$V_{ox}(R) = \pi \int_0^{\pi} (g^2(x) - f^2(x))\,dx = \pi \int_0^{\pi} \left[(\pi x - x^2)^2 - \operatorname{sen}^2 x\right] dx = \pi \int_0^{\pi} \left[\pi^2 x^2 - 2\pi x^3 + x^4 - \frac{1 - \cos 2x}{2}\right] dx$$

2,0

$$= \pi \left[\pi^2 \frac{x^3}{3} - 2\pi \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right]_0^{\pi} = \pi \left(\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5} - \frac{1}{2}\pi\right) = \pi \left(\frac{\pi^5}{30} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_{oy}(R) = 2\pi \int_0^{\pi} x(g(x) - f(x))\,dx = 2\pi \int_0^{\pi} x\left[(\pi x - x^2) - \operatorname{sen} x\right] dx = 2\pi \int_0^{\pi} (\pi x^2 - x^3 - x \operatorname{sen} x)\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{\pi x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\pi} - 2\pi \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx = 2\pi \frac{\pi^4}{12} - 2\pi \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{\pi^5}{6} - 2\pi \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$$

2,0 Por Partes: $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,dx = \pi$

$u = x \to du = dx$

$dv = \operatorname{sen} x\,dx \to v = -\cos x$

Entonces $V_{oy}(R) = \frac{\pi^5}{6} - 2\pi \cdot \pi = \frac{\pi^5}{6} - 2\pi^2$

$\therefore V_{oy}(R) = \pi^2\left(\frac{\pi^3}{6} - 2\right)$

Control 2

P1.

(a) (3.0 ptos.) Calcule:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin(\frac{i\pi}{2n})\frac{i}{n^2}$$

(b) (3.0 ptos.) Calcule la derivada de la función:

$$f(x)=\int_0^{|x^3|}\sin(t^2)dt$$

en los puntos donde esta exista.

P2.

(a) (2.0 ptos.) Calcule:

$$\int\frac{\sqrt{x}+1}{x^{3/2}+1}dx$$

(b) (2.0 ptos.) Calcule:

$$\int\frac{\arctan(x)}{x^2}dx$$

(c) (2.0 ptos.)Hallar una recurrencia para

$$I_n=\int x^n\sin(x)dx$$

, en términos de I_{n-2}

P3.

(a) (3.0 ptos.)Considere $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ función impar, derivable en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente. Demuestre que la función:

$$g(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt$$

tiene un mínimo global en $x=0$ y que es convexa en $\mathbb{R}$

(b) (3.0 ptos.)
Sean $f,g:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$. Funciones continuas, tal que g tiene signo constante en $[0,\infty)$ y $f(0)=0$.
Demuestre que para todo $a,b\in(0,\infty)$ tales que$0<a<b$ se cumple:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(\frac{x}{n})g(x)dx=0$$

Tiempo: 3.0 horas.

Cálculo Diferencial e Integral
Control 2 (12-1)
Pauta Problema 1

a) Calcular $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{i}{n^2}$.

Ponemos $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\frac{i}{n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\cdot\frac{1}{n}$ que se identifica

como suma de Riemann donde $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n} \Rightarrow b-a=1$ y $x_i = a+\frac{b-a}{n}i = \frac{i}{n}$

(1.0) Así, $a=0$, $b=1$ y $f(x) = x\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

(0.5) Entonces $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\frac{i}{n^2} = \int_0^1 x\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$, por partes $\begin{cases} u=x \to du=dx \\ dv=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} \to v=-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\end{cases}$

$$\int_0^1 x\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)dx = \cancel{-\frac{2}{\pi}x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^1}^{\,0} + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{4}{\pi^2}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{\pi^2}$$

(1.5) Entonces $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\frac{i}{n^2} = \frac{4}{\pi^2}$

b) Sea $I(x) = \int_0^{|x^3|}\operatorname{sen}(t^2)\,dt$. Calculamos su derivada.

(0.7) i) Si $x>0$, $I(x) = \int_0^{x^3}\operatorname{sen}(t^2)dt \Rightarrow I'(x) = 3x^2\operatorname{sen}(x^6)$ (por T.F.C.)

(0.8) ii) Si $x<0$, $I(x) = \int_0^{-x^3}\operatorname{sen}(t^2)dt \Rightarrow I'(x) = -3x^2\operatorname{sen}(x^6)$ (por T.F.C.)

iii) Si $x=0$ es preciso usar la definición $\lim_{h\to 0}\frac{I(h)-I(0)}{h}$ con $I(0)=0$

(0.8) Así, $\lim_{h\to0^+}\frac{\int_0^{h^3}\operatorname{sen}(t^2)dt - 0}{h} \overset{L'H\hat{o}p}{=} \lim_{h\to0^+}\frac{3h^2\operatorname{sen}(h^6)}{1} = 0$

y $\lim_{h\to0^-}\frac{\int_0^{-h^3}\operatorname{sen}(t^2)dt - 0}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{-3h^2\operatorname{sen}(h^6)}{1} = 0$

(0.7) Entonces $I(x)$ también es derivable en 0 y $I'(0)=0$.

Control 2 - Pauta Problema 2

a) Calcule $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^{3/2}+1}dx$ con la sustitución $x=u^2$, $dx=2u\,du$

queda $I = \int \frac{(u+1)2u\,du}{u^3+1} = 2\int \frac{\cancel{(u+1)}u\,du}{\cancel{(u+1)}(u^2-u+1)} = \int \frac{2u\,du}{u^2-u+1}$

1.0 $= \int \frac{2u-1+1}{u^2-u+1}du = \int \frac{2u-1}{u^2-u+1}du + \int \frac{du}{(u-\frac{1}{2})^2+3/4}$

$= \ln(u^2-u+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} = \ln(u^2-u+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

1.0 Entonces $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^{3/2}+1}dx = \ln(x-\sqrt{x}+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

b) Calcule $I = \int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}$ por partes $u = \operatorname{arctg}x \to du = \frac{dx}{x^2+1}$

$dv = \frac{dx}{x^2} \to v = -\frac{1}{x}$

1.0 Entonces $I = uv - \int v\,du = -\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} + \underbrace{\int \frac{dx}{x(x^2+1)}}_{\text{Separación}} = -\frac{\operatorname{arctg}x}{x} + \int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)$

1.0 Así, $I = -\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = -\frac{\operatorname{arctg}x}{x} + \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C$

c) Recurrencia para $I_n = \int x^n \operatorname{sen}(x)\,dx$

1.0 Por partes $u = x^n \to du = nx^{n-1}dx$
$dv = \operatorname{sen}x\,dx \to v = -\cos x$ $\Rightarrow I_n = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx$

Nuevamente por partes

$u = x^{n-1} \to du = (n-1)x^{n-2}$
$dv = \cos x\,dx \to v = \operatorname{sen}x$ Así, $I_n = -x^n\cos x + n\left[x^{n-1}\operatorname{sen}x - (n-1)\underbrace{\int x^{n-2}\operatorname{sen}x}_{I_{n-2}}\right]$

1.0 Siguiente que $I_n = -x^n\cos x + nx^{n-1}\operatorname{sen}x - n(n-1)I_{n-2}$ $\forall n \geq$

Control 2 - Pauta Problema 3

a) $g(x)=\int_0^{x^2} f(t)\,dt \Rightarrow g'(x)=2x\,f(x^2)$ por T.F.C. pues g es derivable ya que f derivable y luego continua.

0.5 Como f es impar $f(x)=-f(-x) \Rightarrow f(0)=0$

Además f creciente estricta, entonces $x>0 \Rightarrow f(x)>f(0)=0$

Sigue que $g'(x_0)=0$ si $x_0=0 \vee f(x_0^2)=0$, es decir $x_0=0$

y $g'(x)>0$ si $x>0$, $g'(x)<0$ si $x<0$ $(f(x^2)\geq 0)$

1.5 Así, g decrece en $(-\infty,0]$ y crece en $[0,\infty) \Rightarrow x_0=0$ es pto de mínimo global

Además $g''(x)=2\underbrace{f(x^2)}_{\geq 0}+\underbrace{4x^2}_{\geq 0}\underbrace{f'(x^2)}_{\geq 0} \geq 0$ (f creciente $\Rightarrow f'\geq 0$)

1.0 Sigue que $g''(x)\geq 0$ en $\mathbb{R}$, es decir g es convexa en $\mathbb{R}$

b) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)\,dx = 0$

En efecto, como f, g son continuas en $[0,\infty)$ y g es de signo constante en $[0,\infty)$, se puede aplicar el TEO VALOR MEDIO GENERALIZADO para integrales, es decir:

1.5 $\exists\, \xi\in[a,b]\subseteq[0,\infty)$ tal que $\int_a^b f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)\,dx = f\left(\frac{\xi}{n}\right)\int_a^b g(x)\,dx$

Además, g es continua en $[a,b]\subseteq[0,\infty)$ y por lo tanto integrable

0.5 con $\int_a^b g(x)\,dx$ acotada.

Por otro lado $\frac{\xi}{n}\to 0$ si $n\to\infty$ y f continua $\Rightarrow f\left(\frac{\xi}{n}\right)\to f(0)=0$

1.0 Así $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{\xi}{n}\right)\int_a^b g(x)\,dx = 0\cdot\int_a^b g(x)\,dx = 0$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral 12-2

Control 2

P1. Calcule

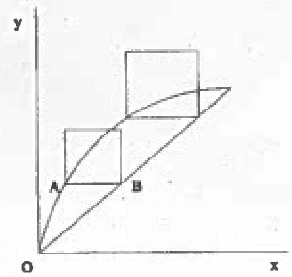
i) (2,0 ptos.) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$ usando el cambio de variable $u = \tan x$.

ii) (2,0 ptos.) $\displaystyle\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}dx$.

iii) (2,0 ptos.) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{sen}(\frac{k\pi}{2n})$.

P2. i) (3,0 ptos.) Considere la región del primer cuadrante encerrada por la parábola $y^2 = 4ax$, $a > 0$ y la recta $y = x$. El segmento AB de la figura se mueve paralelo al eje OX apoyando sus extremos A y B en la parábola y la recta respectivamente.

Encuentre el volumen del sólido que se genera al levantar cuadrados de la lado AB en cada posición de este segmento dentro de la región undicada.



ii) (3,0 ptos.) Considere la región limitada por la curva $y = \frac{1}{a}(x-2a)^2$ y el eje OX para $x \in [2a, 3a]$. Calcule los volúmenes de revolución generados por la rotación de esta región en torno al eje OX y al eje OY.

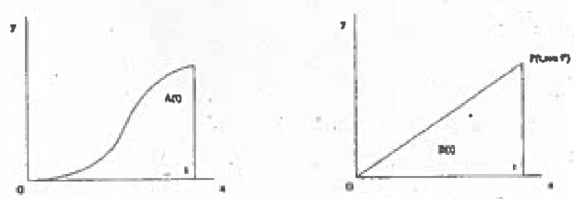
P3. a) Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ que satisface la siguiente ecuación: $x\operatorname{sen}(\pi x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)dt$. Se pide

i) (2,0 ptos.) Encontrar $f(4)$.

ii) (2,0 ptos.) Usando la continuidad de f, calcule $f(0)$.

b) (2,0 ptos.) En la figura se muestran dos regiones en el primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva de $y = \operatorname{sen}(x^2)$ desde 0 hasta t y $B(t)$ es el área del triángulo de vértices O, $P(t, \operatorname{sen}(t^2)$ y $(t, 0)$.

Calcule $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \frac{A(t)}{B(t)}$.



Formulario:

$$A = \int_a^b h(x)dx, \qquad V = \pi\int_a^b h^2(x)dx \quad V = 2\pi\int_a^b xh(x)dx, \qquad V = \int_a^b A(x)dx.$$

OX   OY

Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 3:00

Cálculo Diferencial e Integral - Control 2

Pauta Problema 1

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}$ Con $u = \operatorname{tg} x$, $du = \sec^2 x\, dx = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

además $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{\sec^2 x} = \dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x - 1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

Sigue que $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{u^2}{1+u^2}$

(10)

Entonces $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \int \frac{du}{\frac{u^2}{1+u^2}} = \int \frac{1+u^2}{u^2}\, du = \int \left(\frac{1}{u^2}+1\right) du = -\frac{1}{u} + u = \operatorname{tg} x - \cot x +$

(10)

ii) $\displaystyle\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx = \int \frac{(x^2+1-1)\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)}\, dx = \int \operatorname{arctg} x\, dx - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$

donde $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

Por Partes $\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \to du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \to v = x \end{cases}$

(10)

Además $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx = \int t\, dt = \frac{1}{2} t^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$

Sustitución $t = \operatorname{arctg} x$, $dt = \dfrac{dx}{1+x^2}$

(10) Entonces $\displaystyle\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C$

iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ puede interpretarse como una suma de Riemann

$\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ donde $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}$

$x_k = \dfrac{k}{n}$, $a = 0$ $\Rightarrow$ $b-a = 1 \Rightarrow b = 1$, $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$

10

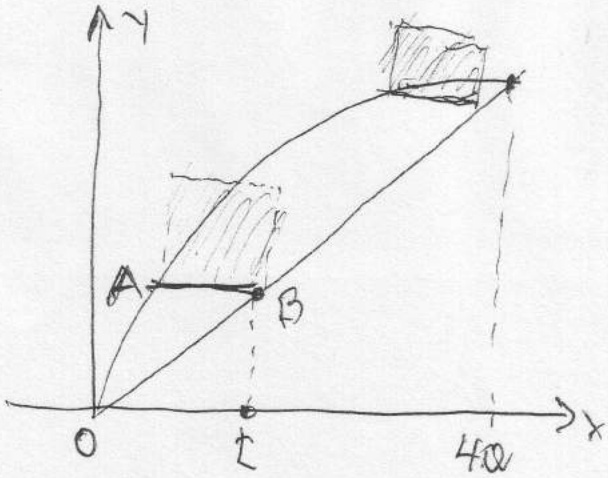
Así $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \cancel{-\frac{2x}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^1}^{\,0} + \frac{2}{\pi}\int \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \frac{2}{\pi}\frac{2}{\pi}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right] = \frac{4}{\pi^2}$

Partes $u = x \to du = dx$, $dv = \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2}\, dx \to v = -\dfrac{2}{\pi}\cos\dfrac{\pi x}{2}$

(10) Sigue que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi^2}$

Pauta Problema 2

i)



Puntos de intersección de $y^2=4ax \wedge y=x$

$x^2=4ax \Rightarrow x=0 \wedge x=4a$

Para cualquier posición del trazo AB supongamos $x_B=t \Rightarrow$ por $y=x$, $y_B=t$

Como AB // eje OX, $y_A=y_B=t$

y como $y_A^2=4ax_A \Rightarrow t^2=4ax_A$.

(1.0) Sigue que $x_B=t \wedge x_A=\frac{t^2}{4a}$, entonces $\overline{AB}=x_B-x_A=t-\frac{t^2}{4a}$

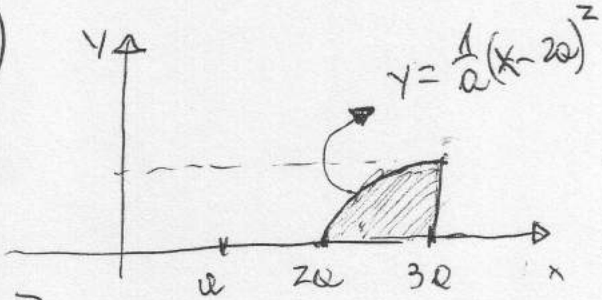
Así, el área de la sección cuadrada es $\text{Area}(t)=\left(t-\frac{t^2}{4a}\right)^2$

Entonces $\text{Volumen}=\int_0^{4a}\text{Area}(t)\,dt=\int_0\left(t-\frac{t^2}{4a}\right)^2=\int_0\left[t^2+\frac{t^4}{16a^2}-\frac{t^3}{2a}\right]dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{t^5}{5\cdot 16a^2}-\frac{t^4}{4\cdot 2a}\right]_0^{4a}=\frac{64}{3}a^3+\frac{4^3\cancel{4^2}a^{\cancel{5}\,3}}{5\cdot\cancel{4^2}\cancel{a^2}}-\frac{4^3\cancel{4}a^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{4}\cdot 2\cancel{a}}=64a^3\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right]$

(2.0) Así $V=\frac{64}{30}a^3=\frac{32}{15}a^3$

ii)



$V_{ox}=\pi\int_{2a}^{3a}f(x)^2dx=\pi\int_{2a}^{3a}\frac{1}{a^2}(x-2a)^4dx$

(1.0) $=\frac{\pi}{a^2}\left.\frac{(x-2a)^5}{5}\right|_{2a}^{3a}=\frac{\pi a^5}{5a^2}=\frac{\pi}{5}a^3$

$V_{oy}=2\pi\int_{2a}^{a}x f(x)dx=2\pi\int_{2a}^{3a}x\frac{1}{a}(x-2a)^2dx=\frac{2\pi}{a}\int_{2a}^{3a}x(x-2a)^2dx$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Sustitución}\\ u=x-2a\\ du=dx\end{array}\right.$

$\Rightarrow V_{oy}=\frac{2\pi}{a}\int_0^a(u+2a)u^2du=\frac{2\pi}{a}\int_0^a[u^3+2au^2]du=\frac{2\pi}{a}\left[\frac{u^4}{4}+2a\frac{u^3}{3}\right]_0^a$

(2.0) $\Rightarrow V_{oy}=\frac{2\pi}{a}a^4\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)=\frac{11}{6}\pi a^3$

Pauta Problema 3

a) f es continua en $\mathbb{R}$ y $x\,\text{sen}(\pi x)=\int_0^{x^2} f(t)\,dt$

i) Encontrar $f(4)$.

Derivando la ecuación y usando TFC.

(1.0) $(x\,\text{sen}(\pi x))' = \left(\int_0^{x^2} f(t)\,dt\right)' \Rightarrow \text{sen}(\pi x)+\pi x\cos(\pi x) = f(x^2)\cdot 2x$

Para obtener $f(4)$, basta con $x=2$, entonces

(1.0) $\underbrace{\text{sen}(2\pi)}_{0} + 2\pi \underbrace{\cos 2\pi}_{1} = f(4)\cdot 4 \Rightarrow f(4)=\frac{2\pi}{4}=\pi/2$

ii) Como f es continua, x^2 continua, $f(x^2)$ continua en $\mathbb{R}$ y en particular en $x=0$.

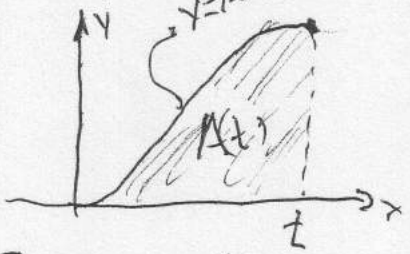
(1.0) Así, $\lim_{x\to 0} f(x^2) = f(0)$, y del punto anterior

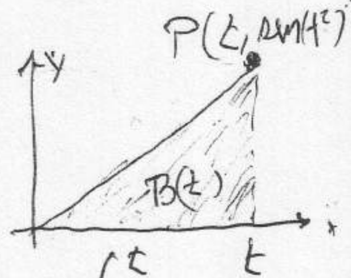
$$f(x^2)=\frac{\text{sen}(\pi x)}{2x}+\frac{\pi\cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi}{2}\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}+\frac{\pi}{2}\cos(\pi x)$$

Entonces $\lim_{x\to 0} f(x^2) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\pi}{2}\overbrace{\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}}^{1} + \frac{\pi}{2}\overbrace{\cos(\pi x)}^{1}\right] = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

(1.0) y por unicidad del Límite: $f(0)=\pi$

b)





(1.0) Es inmediato que $A(t)=\int_0^t \text{sen}(x^2)\,dx$ y $B(t)=\frac{1}{2}t\,\text{sen}(t^2)$ (Area Δ)

Así $\lim_{t\to 0}\frac{A(t)}{B(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t \text{sen}(x^2)\,dx}{\frac{1}{2}t\,\text{sen}(t^2)} \overset{L'H}{=} 2\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}(t^2)}{\text{sen}(t^2)+2t^2\cos(t^2)} = 2\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{\text{sen}\,t^2/t^2}^{1}}{\frac{\text{sen}\,t^2}{t^2}+2\underbrace{\cos t^2}_{1}}$

(1.0) $\therefore \lim_{t\to 0}\frac{A(t)}{B(t)} = \frac{2}{3}$ (OBS: También se puede rematar con más L'Hopital

MA1002 - Cálculo Diferencial e Integral **7 de Enero 2012**

Control 2

Profesor: *Raúl Uribe* Auxiliar: *Franco Basso*

P1. (i) Calcular el siguiente límite L, mediante la noción de Sumas de Riemann y el concepto de la Integral Definida:

$$L = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+(\frac{i\pi}{n})^2)}$$

(ii) Sea $F : [a,b] \to [p,q]$ una función biyectiva de clase C^1. Demostrar que:

$$\int_p^q F^{-1}(t)dt = (bq-ap) - \int_a^b F(x)dx$$

P2. (i) Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{u^2}du}{\int_0^x sen(u^2)du} =$$

(ii) Sea f una función continua y sean G, F las funciones definidas por:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \qquad G(x) = \int_0^x f(t^2)dt$$

Demostrar que:

$$\int_0^m G(x)dx = mG(m) - \frac{1}{2}F(m^2)$$

P3. Calcular:

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2sen^2x + b^2cos^2x}$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 x \arcsin x dx$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3+2cosx}$

P1 i)

$$L = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\left(\frac{i\pi}{n}\right)^2\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^{n}\left(1+\left(\frac{i\pi}{n}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{i\pi}{n}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{i\pi}{n}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{n}$$ ✓ 0,7

Como

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

con $x_i = \frac{b-a}{n}\cdot i + a$ y $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$

tomando $a=0,\ b=1$

$$x_i = \frac{i}{n} \qquad \Delta x_i = \frac{1}{n}$$

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)\,dx$$

así, sea

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = Ln\left(1 + \left(\frac{i\pi}{n}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = Ln\left(1 + x^2\pi^2\right)$$

se tiene que

$$L = \int_0^1 Ln\left(1 + x^2\pi^2\right) dx$$ (0,7)

C.V $u = x\pi \longrightarrow du = \pi dx$

$$\rightarrow L = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} Ln\left(1 + u^2\right) du$$

Por partes $U = Ln(1+u^2)$ $dU = \frac{2u}{1+u^2} du$

$dV = du$ $V = u$

$$\rightarrow L = \frac{1}{\pi} \cdot \left(u Ln(1+u^2)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2u^2}{1+u^2} du \right)$$

$$L = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\pi Ln(1+\pi^2) - 2\underbrace{\int_0^{\pi} \frac{u^2}{1+u^2} du}_{J} \right)$$ (0,8)

RHEIN

Fecha / Date:

$$J = \int_0^{\pi} \frac{u^2}{1+u^2}\, du = \int_0^{\pi} du - \int_0^{\pi} \frac{1}{1+u^2}\, du$$

$$= \pi - \arctan(u)\Big|_0^{\pi}$$

$(0, \pi)$

como $\arctan(0) = 0$

y $\arctan(\pi) = \arctan(\pi)$

$$\rightarrow \quad J = \pi - \arctan(\pi)$$

Así

$$L = \ln(1+\pi^2) - 2 + \frac{2\arctan(\pi)}{\pi}$$

y así

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \ln \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \left(\frac{i\pi}{n}\right)^2\right)} = \ln(1+\pi^2) - 2 + \frac{2\arctan(\pi)}{\pi}}$$

Fecha / Date:

c) $\int_p^q F^{-1}(t)dt \rightarrow$ por partes

$U = F^{-1}(t) \qquad dU = (F^{-1}(t))'dt$

$dV = dt \qquad V = t$

$= tF^{-1}(t)\Big|_p^q - \int_p^q t(F^{-1}(t))'dt$ 1,0

$\rightarrow qF^{-1}(q) - pF^{-1}(p) - \int_p^q t(F^{-1}(t))'dt$

$\rightarrow qb - pa - \int_p^q t(F^{-1}(t))'dt$ 0,5

C.V: Como $X = F^{-1}(t) \rightarrow F(X) = t$ 1,0

sea $w = F^{-1}(t) \rightarrow F(w) = t$

$dw = (F^{-1}(t))'dt$

$\rightarrow qb - pa - \int_a^b F(w)dw$ 0,5

P2 | 3)

i) $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{u^2}\,du}{\int_0^{x} \sin(u^2)\,du}$$

Ver que es del tipo 0/0, luego planteamos el problema auxiliar empleando L'Hôpital

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{u^2}\,du}{\int_0^{x} \sin(u^2)\,du} \overset{L'H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^{x^3} e^{u^2}\,du\right)'}{\left(\int_0^{x} \sin(u^2)\,du\right)'}$$

Empleando T.F.C (Descuenta 0,2) ← 1.0

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^6}\cdot 3x^2 - \cancel{e^{0}\cdot 0'}}{\sin(x^2)\cancel{x'} - \cancel{\sin(0)\cdot 0'}} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{x^6}x^2}{\sin(x^2)} \quad \text{tipo } \frac{0}{0}$$

← 1.0

Existen varias maneras de resolverlo.

→ por continuidad y límites conocidos

$$\lim_{x\to 0} \frac{3e^{x^6}x^2}{\sin(x^2)} = 3\underbrace{\lim_{x\to 0} e^{x^6}}_{\to 1 \text{ por continuidad}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = 3\cdot \underbrace{\lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin(u)}}_{1} = 3$$

$u = x^2$, $x\to 0$, $u\to 0$

→ Empleando nuevamente L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3e^{x^6}x^2}{\sin(x^2)} \overset{L'H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{6e^{x^6}x + 18e^{x^6}x^7}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{e^{x^6}} + 9\cancel{e^{x^6}x^6}}{\cancel{\cos(x^2)}}$$

función continua.

$$= 3$$

← 1.0

ii) integrando por partes sobre $G(x)$

$u = G(x) \quad ; \quad du = G'(x)$

$dv = 1 \quad ; \quad v = x$

$$\int_0^m G(x)\,dx = G(x)\,x \Big|_0^m - \int_0^m G'(x)\,x\,dx$$ 1.0

$$G'(x) = \left(\int_0^x f(t^2)\,dt\right)' \underset{(T.F.C.)}{=} f(x^2)\cdot \cancel{x'}^{1} - \cancel{f(0)\cdot 0'}^{0} = f(x^2)$$

$$\int_0^m G(x)\,dx = G(x)\,x\Big|_0^m - \int_0^m f(x^2)\,x\,dx$$

C.V.

$\omega = x^2$

$d\omega = 2x\,dx$

$$\int_0^m G(x)\,dx = G(x)\,x\Big|_0^m - \frac{1}{2}\int_0^m f(x^2)\,2x\,dx$$ 1.0

$$\int_0^m G(x)\,dx = G(x)\,x\Big|_0^m - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{m^2} f(\omega)\,d\omega}_{F(m^2)}$$

$$\int_0^m G(x)\,dx = G(m)\,m - \frac{1}{2}F(m^2)$$ 1.0

Pauta P3 Control # 2

Cálculo Diferencial e Integral (MA1002) - Semestre Verano 2012

Profesor: Raúl Uribe S.

Prof. auxiliar: Franco Basso S.

Autor: Néstor Jofré M.

IMPORTANTE: La puntuación detallada de cada pregunta está sujeta al uso adecuado de teoremas y cambios de variable empleados en cada desarrollo, por lo tanto, es relativa y no existe una única solución para cada problema.

$\boxed{\text{P3.}}$ Calcular:

(i) (2.0 pts.) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$

Previamente, se tiene que $a \neq 0 \vee b \neq 0$, pues la primitiva a calcular no existiría ($a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x \neq 0$). Entonces, se proponen dos soluciones:

SOL. N° 1 (Elegante):

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} &= \int \frac{1}{b^2}\frac{dx}{\left(\frac{a}{b}\right)^2\sin^2 x + \cos^2 x} \\
&= \frac{1}{b^2}\int \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2 + 1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{b^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{b}}{\mathbf{a}}\int \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\tan x\right)^2 + 1}\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\sec^2 x dx\right) \leftarrow \\
&= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C \blacksquare
\end{aligned}$$

Por el Teorema del Cambio de variable con $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $u = \frac{a}{b}\tan x$ $\to du = \frac{a}{b}\sec^2 x dx$

SOL. N° 2 (Por casos):

✓ Caso $|a| = |b| \neq 0$ ($\leftrightarrow a^2 = b^2 \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} &= \int \frac{dx}{a^2(\cancelto{1}{\sin^2 x + \cos^2 x})} \\
&= \frac{1}{a^2}\int dx \\
&= \frac{x}{a^2} + C_0
\end{aligned}$$

✓ Caso $a = 0 \wedge b \neq 0$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \int \frac{dx}{b^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{b^2} \int \sec^2 dx \\ &= \frac{\tan x}{b^2} + C_1\end{aligned}$$

✓ Caso $b = 0 \wedge a \neq 0$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x} \\ &= \frac{1}{a^2} \int \csc^2 dx \\ &= -\frac{\cot x}{a^2} + C_2\end{aligned}$$

✓ Caso $|a| \neq |b| \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0$: Se puede hacer de la manera "elegante" o usando los cambios de variable $u = \tan x$ (óptimo) o, en su defecto, $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ (engorroso y lento).

(ii) (2.0 pts.) $\displaystyle\int_0^1 x\arcsin x dx$

SOL: Usando integración por partes sobre la función $f(x) = x\arcsin x$, continua en su dominio y, en particular, en el intervalo $[0,1]$ por álgebra de funciones continuas (y, por lo tanto, *integrable*) y, además, considerando $u = \arcsin x$ y $dv = xdx$, se obtiene lo siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Cambio de variable:}\\ x=\sin u\\ \to u=\arcsin x \wedge dx=\cos u du\\ x=0\to u=0;\\ x=1\to u=\frac{\pi}{2}\end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\arcsin x dx &= \left(\frac{x^2}{2}\arcsin x\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leftarrow \\
&= \left(\frac{1^2}{2}\arcsin 1 - \cancelto{0}{\frac{0^2}{2}\cdot\arcsin 0}\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u\cos u du}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u\cos u du}{\sqrt{\cos^2 u}} \leftarrow \boxed{\sin^2 u = \tfrac{1-\cos(2u)}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{1-\cos(2u)}{2}\right)\cancel{\cos u}du}{\cancel{\cos u}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos(2u)\big)du \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(u - \frac{\sin(2u)}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \cancelto{0}{\frac{\sin\left(\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}\right)}{2}} - \cancelto{0}{\left(0 - \frac{\sin(2\cdot 0)}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \blacksquare
\end{aligned}$$

(iii) (2.0 pts.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3+2\cos x}x$

SOL: La función $g(x) = \frac{1}{3+2\cos x}$ es continua (entonces *integrable*) en su dominio y, en particular, en el intervalo $[0, \frac{\pi}{3}]$ por álgebra de funciones continuas. Usando el conocido cambio de variables $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, se tiene que:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Cambio de variable:} \\ u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ \to dx = \frac{2du}{1+u^2} \wedge \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ x = 0 \to u = 0; \\ x = \frac{\pi}{3} \to u = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3+2\cos x} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3+2\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2du}{\cancel{1+u^2}}}{\frac{3(1+u^2)+2(1-u^2)}{\cancel{1+u^2}}} \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2du}{3+3u^2+2-2u^2} \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2du}{u^2+5} \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{\mathbf{5}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}du}{\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)^2+1} \leftarrow \boxed{\text{Por Teorema del Cambio de variable}} \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{5}\left(\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{5}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \cancelto{0}{\arctan\left(\frac{0}{\sqrt{5}}\right)}\right) \\
&= \frac{2}{5}\sqrt{5}\arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Universidad de Chile
Facultad De Ciencias Físicas y Matemáticas
Prof.: Raúl Uribe
Prof. Aux.: Braulio Sánchez Ibáñez

Cálculo Diferencial e Integral
Pauta Control 2

Problema 1.-

(a) Calcule los siguientes límites, identificándolos como una suma de Riemann.

(i) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$
$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$
$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$
$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x\frac{1}{1+x_i^2}$

Con esto, tenemos un intervalo de integración $[0,1]$, partición equiespaciada con $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_i = \frac{i}{n}$ y $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (0.1 ptos). Como f es continua en $[0,1]$, aplicamos TFC , obteniendo que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \text{ (0.1 ptos.)}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(1)-\arctan(0) = \frac{\pi}{4} \text{ (0.3 ptos.)}$$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^3}+\ldots+\sqrt[n]{e^n}}{n}$
$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt[n]{e^i}$
$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{i}{n}}$
$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x e^{x_i}$

Con esto, tenemos un intervalo de integración $[0,1]$, partición equiespaciada con $\Delta x = \frac{1}{n}$, $x_i = \frac{i}{n}$ y $f(x) = e^x$ (0.1 ptos). Como f es continua en $[0,1]$, aplicamos TFC , obteniendo que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt[n]{e^i}}{n} = \int_0^1 e^x dx \text{ (0.1 ptos.)}$$

$\displaystyle\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1$ (0.3 ptos.)

(b) Determinar la función (única) que satisface la relación

$$(x^3+1)f(x) - 3\int_0^x t^2 f(t)dt = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} + 1$$

Derivamos la expresión anterior, suponiendo que la función f es integrable, de modo de poder usar el TFC 2 (0.2 ptos).

$$\begin{aligned} 3x^2 f(x) + (x^3+1)f'(x) - 3x^2 f(x) &= x^4 + x \\ (x^3+1)f'(x) &= x(x^3+1) \\ f'(x) &= x \end{aligned}$$

Luego, $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$ (1.0 pto). Como queremos una función única, debemos determinar la constante c. Para ello, evaluamos la expresión original en $x = 0$, obteniendo:

$$\begin{aligned} f(0) - 3\int_0^0 t^2 f(t)dt &= 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

$f(0) = c = 1$, por lo tanto, $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$(0.3 ptos).
NOTA: Esta función es integrable, así que la suposición original es correcta.

(c) Sea f una función continua tal que $\displaystyle\int_0^x tf(t)dt = \sin(x) - x\cdot\cos(x)$.
Calcule $f(\frac{\pi}{2})$ y $f'(\frac{\pi}{2})$.

Al ser f continua, derivamos la expresión anterior, utilizando TFC 1 (0.3 ptos).

$$\begin{aligned} xf(x) &= \cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) \\ f(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

Claramente, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ (0.6 ptos), $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ (0.6 ptos).

(d) Dada la función $f(x) = \int_x^2 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$, calcular $\int_0^2 xf(x)dx$.

La función $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ es continua en $]-1,2]$. Por el 1er TFC, $f(x) = \int_x^2 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ es una función continua y derivable, con $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^3}}$ (0.5 ptos).

Integramos por partes la expresión $\int_0^2 xf(x)dx$.

$u = f(x)$, $dv = xdx$, $\Longrightarrow du = f'(x)dx$, $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\int_0^2 xf(x)dx = \frac{x^2}{2}f(x)|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^3}}$$
$$\int_0^2 xf(x)dx = 2f(2) - 0f(0) + \frac{1}{3}\sqrt{1+x^3}|_0^2$$
$$\int_0^2 xf(x)dx = \frac{1}{3}(\sqrt{9}-\sqrt{1})$$
$$\int_0^2 xf(x)dx = \frac{2}{3}(1.5 \text{ ptos.})$$

Problema 2.-

(a) Determinar el área encerrada por las curvas $f(x) = 4x+3$ y $g(x) = 6-x-2x^2$ en $[-4,2]$

Los puntos de intersección son $(-3,-9)$ y $(\frac{1}{2},5)$. En $[-4,-3] \cup [\frac{1}{2},2]$, $f(x) > g(x)$. Luego $A = \int_{-4}^{-3}(f(x)-g(x))dx + \int_{-3}^{\frac{1}{2}}(g(x)-f(x))dx + \int_{\frac{1}{2}}^2(f(x)-g(x))dx$ (0.5 ptos).

$$A = \int_{-4}^{-3}(2x^2+5x-3)dx - \int_{-3}^{\frac{1}{2}}(2x^2+5x-3)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2(2x^2+5x-3)dx$$
$$A = \frac{343}{12} \text{ (2.5 ptos).}$$

(b) Determinar el área encerrada por la curva $(x^2+y^2-c^2)(x^2+y^2) = 4a^2x^2$.
INDICACIÓN: Transformar a coordenadas polares.

Las transformaciones desde coordenadas cartesianas a polares son $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. Reemplazando en la ecuación queda:

$$(r^2-c^2) = 4a^2\cos^2(\theta)$$

Luego $r(\theta) = \sqrt{4a^2\cos^2(\theta)+c^2}$ (1.0 ptos). La fórmula del área en polares es $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2(\theta)d\theta$.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4a^2\cos^2(\theta) + c^2)$$

Integrando se obtiene $A = \pi(2a^2 + c^2)$ (2.0 ptos).

Problema 3.-

(a) Calcular el volumen generado por la región encerrada entre las curvas $y^2 = x + 2$ y $y = |x|$ al rotar en torno al eje OX.

Los puntos de intersección son $(-1, 1)$ y $(2, 2)$.

$V_{OX} = \pi \int_{-1}^{2} [(x + 2) - x^2]dx$ (0.5 ptos)

$V_{OX} = \frac{9\pi}{2}$ (2.5 ptos)

(b) (3.0 ptos.) Calcular el perímetro de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Despejamos $y = f(x) = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}$(0.5 ptos)

Para el dominio, se establece que $a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \geq 0$, que es equivalente a $x^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}$.
Elevamos al cubo: $x^2 \leq a^2$.
Finlamente: $-a \leq x \leq a$ (0.5 ptos).

$P = 2 \cdot \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = 2a^{\frac{1}{3}} \cdot \int_{-a}^{a} x^{-\frac{1}{3}}dx = 6a$ (2.0 ptos).

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral 13-2

CONTROL 2

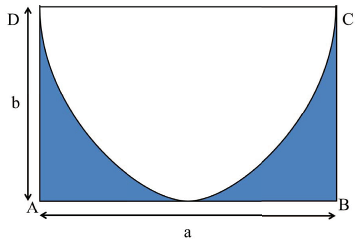
P1. a) (3,0 ptos.) Dada la función

$$f(x) = \int_x^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt.$$

Calcular

$$\int_0^2 x f(x) dx.$$

b) (3,0 ptos.) Demuestre que en todo rectángulo de lados a y b, la parábola que pasa por sus dos vértices superiores y el punto medio del lado inferior (ver figura), cubre siempre una misma fracción del área del rectángulo.



P2. a) (2,0 ptos.) Demuestre que

$$J = \int_0^4 x\sqrt{4-(x-2)^2} dx = 4\pi.$$

b) Considere la función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt$.

i) (1,0 pto.) Demuestre que $\forall x > 0,\ f(x) \geq 0$.

ii) (2,0 ptos.) Demuestre que $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$.

iii) (1,0 pto.) Calcule el área encerrada entre la curva $g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x}$ y el eje OX desde $x = \frac{1}{e}$ hasta $x = e$.

P3. a) i) (1,5 ptos.) Calcule $\displaystyle\int \ln(1+x^2)dx$.

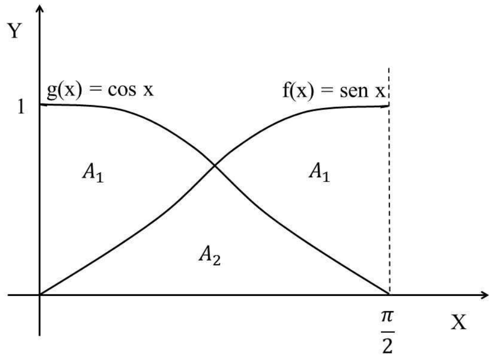
ii) (1,5 ptos.) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \ln \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left[1 + \left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\right]} \right\}.$$

b) Dadas las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$, determine:

i) (1,0 pto.) El volumen del sólido de revolución engendrado al rotar el área achurada A_1, en torno al eje OX.

ii) (2,0 ptos.) El volumen del sólido de revolución engendrado al rotar el área A_2, en torno al eje OY.



Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 3:00

Calculo Diferencial e Integral (13-2)

Control 2 Pauta Problema 1

a) $f(x)=\int_x^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$. Calcular $\int_0^2 x f(x)\,dx$

Integrando por partes $I=\int_0^2 x f(x)\,dx = uv\Big|_0^2-\int_0^2 v\,du$

$u=f(x)\to du=f'(x)\,dx$

$dv=x\,dx\to v=\frac{1}{2}x^2$

0.5

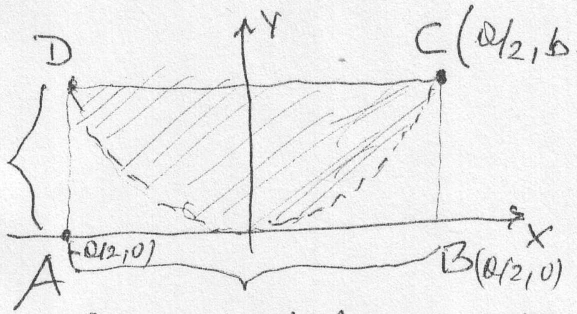
Así $I=\cancel{\frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^2}^{\,0}-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 f'(x)\,dx$ donde $f(2)=\int_2^2\frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}=0$

1.5 y $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ por T.F.C. Entonces $I=+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

Por sustitución, sea $s=x^3+1$; $ds=3x^2\,dx$, entonces

1.0 $I=\frac{1}{2}\int_1^9\frac{1}{3}\frac{ds}{\sqrt{s}}=\frac{1}{6}\int_1^9 s^{-1/2}\,ds=\frac{2}{\cancel{6}_{3}}\sqrt{s}\Big|_1^9=\frac{1}{3}(3-1)=2/3$

b)



Una forma es establecer la parábola que pasa por los vértices superiores C y D y el vértice O (origen) punto medio del lado AB

La parábola es $y=px^2$ y $C(a/2,b)$ es punto de ella.

2.0 así, $b=p\frac{a^2}{4}\Rightarrow p=\frac{4b}{a^2}$, entonces la parábola queda $y=\frac{4b}{a^2}x^2$

El área será la comprendida entre la recta $y=b$ y la parábola

Así, Area $=2\int_0^{a/2}\left[\overset{\text{recta}}{b}-\frac{4b}{a^2}x^2\right]=2\left[bx-\frac{4b}{a^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^{a/2}$

1.5 $=2\left[\frac{ab}{2}-\frac{4b}{a^2}\frac{a^3}{8\cdot 3}\right]=2\left[\frac{ab}{2}-\frac{ab}{6}\right]=\frac{2}{3}ab$

0.5 En consecuencia, para cualquier rectángulo de lados a y b el área de la parábola indicada es siempre 2/3 del área del rectángulo.

Pauta Problema 2

a) $J=\int_0^4 x\sqrt{4-(x-2)^2}\,dx$. Demostrar que $J=4\pi$

Sustitución $x-2=2\operatorname{sen}t$, $dx=2\cos t\,dt$

Si $x=0$; $\operatorname{sen}t=-1 \Rightarrow t=-\pi/2$

$x=4$; $\operatorname{sen}t=1 \Rightarrow t=\pi/2$. Entonces

$$J=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2+2\operatorname{sen}t)\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\operatorname{sen}t)\cos t\cdot\cos t\,dt$$

(1.0) $\Rightarrow J=8\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\operatorname{sen}t)\cos^2 t\,dt = 8\left[\underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt}_{\text{Función PAR}} + \underbrace{\cancel{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}t\cos^2 t\,dt}}_{\text{Función IMPAR}}\right]$ $\to 0$

$$=8\cdot 2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$=\cancel{\frac{16}{2}}^{\,8}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt = 8\left[t+\cancel{\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t}\right]_0^{\pi/2} = 8\,\frac{\pi}{2}=4\pi$$

(1.0) así, $J=4\pi$

b) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\,dt$

i) Dem q' $\forall x>0$, $f(x)\geq 0$

Si $x\in(0,1)$, $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t)}{1+t}\,dt=-\int_x^1\frac{\ln t}{1+t}\,dt$ pues $\ln t<0$ si $t<1$

(0.5) entonces $f(x)>0$ $\forall x\in(0,1)$ y $f(x)=0$ si $x=1$

Si $x\in(1,\infty)$ el integrando y el recorrido de la integral son positivos y por lo tanto $f(x)>0$ $\forall x\in(1,\infty)$

(0.5) Sigue que $\forall x>0$, $f(x)\geq 0$

ii) Demostrar que $f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{1}{2}(\ln x)^2$

Por definición de $f(x)$, $f(\frac{1}{x})=\int_1^{1/x}\frac{\ln t}{1+t}\,dt$

por sustitución, sea $u = \frac{1}{t}$, es decir $t = 1/u$; $dt = -\frac{du}{u^2}$

y para $t=1$, $u=1$ ∧ para $t = 1/x$, $u = x$

Así $f(\frac{1}{x}) = \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t} dt = \int_1^x \frac{\ln(1/u)}{1+1/u}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_1^x \frac{-\ln u}{u^2+u} du$

1.0 $\Rightarrow f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln u}{u(u+1)} du = \int_1^x \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) \ln u \, du$ (Fracciones Parciales)

$\Rightarrow f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln u}{u} du - \int_1^x \frac{\ln u}{1+u} du$ en donde la primera integral es calculable y $\int_1^x \frac{\ln u}{1+u} = f(x)$.

Como $\int_1^x \frac{\ln u}{u} du = \frac{1}{2}(\ln u)^2\Big|_1^x = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ se tiene que

1.0 $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - f(x) \iff f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

iii) El area entre $g(x) = \frac{\ln x}{1+x}$ y el eje ox entre $x = \frac{1}{e}$ y $x = e$ es $A = \int_{1/e}^{e} |g(x)| dx$ donde $g(x) < 0$ si $x \in (1/e, 1)$ y $g(x) > 0$ si

0.5 $x \in (1, e)$. Entonces $A = \int_{1/e}^{1} -g(x) dx + \int_1^e g(x) dx = \int_1^{1/e} g(x) dx + \int_1^e g(x) dx$

Así, $A = \int_1^{1/e} \frac{\ln x}{1+x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{1+x} dx = f(\frac{1}{e}) + f(e)$ según definición de $f(x)$

0.5 y según (ii) $f(\frac{1}{e}) + f(e) = \frac{1}{2}(\ln e)^2 = 1/2$. Entonces $A_{rec} = \frac{1}{2}$

OBSERVACION: La parte (ii) también puede demostrarse verificando que $f(x) + f(\frac{1}{x})$ y $\frac{1}{2}(\ln x)^2$ tienen igual derivada y por lo tanto difieren en una constante, la que vale 0 evaluando las funciones anteriores en $x = 1$

Pauta Problema 3

a) i) Calcular $\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$

Por Partes $u=\ln(1+x^2) \longrightarrow du = \frac{2x\,dx}{1+x^2}$

$dv = dx \longrightarrow v = x$

(0.5)

donde $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx = \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x - \operatorname{arctg} x$

(1.0) Así $\int \ln(1+x^2)\,dx = x\ln(1+x^2) - 2x - 2\operatorname{arctg} x + C$

ii) Calcular $\lim_{n\to\infty}\left\{\ln\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left[1+\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\right]}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\left[1+\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\right]\right\}$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right) + \ln\left(1+\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2\right) + \dots + \ln\left(1+\left(\frac{n\pi}{n}\right)^2\right)\right)\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left[1+\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[1+\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\right]\frac{\pi}{n}$

y este último límite es una suma de Riemann tal que

$x_k = a + \frac{b-a}{n}k = \frac{k\pi}{n} \wedge \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{n} \Rightarrow \begin{cases} b-a=\pi \\ a=0 \\ b=\pi \end{cases} \wedge f(x) = \ln(1+x^2)$

(1.0)

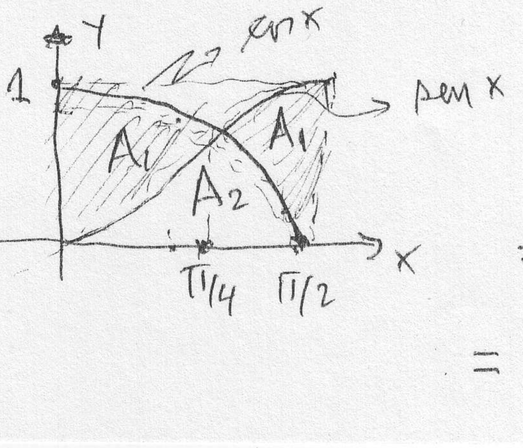
Entonces $\lim_{n\to\infty}\left\{\ln\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left[1+\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\right]}\right\} = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\ln(1+x^2)\,dx}_{\text{Calculado en (a)}}$ y

usando (a)

$\lim_{n\to\infty}\left\{\ln\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left[1+\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2\right]}\right\} = \frac{1}{\pi}\left[x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x\right]_0^{\pi}$

(0.5) $= \ln(1+\pi^2) - 2 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(\pi)$

b) i)



$V_{OX}(A_1) = \pi\int_0^{\pi/4}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\,dx + \pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)\,dx$

$= \pi\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx - \pi\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos 2x\,dx$

$= \pi\,\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\Big|_0^{\pi/4} - \pi\,\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$ (1.0)

$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

ii) Para el volumen de Revolución del A_2 en torno a OY se tiene

$$V_{oy}(A_2) = 2\pi\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen} x\, dx + 2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \cos x\, dx$$

0.5 Partes $u = x \rightarrow du = dx$, $dv = \operatorname{sen} x\, dx \rightarrow v = -\cos x$ $\qquad$ $u = x \rightarrow du = dx$, $dv = \cos x\, dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x$

$$\Rightarrow V_{oy}(A_2) = 2\pi\left[-x\cos x\Big|_0^{\pi/4} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} \cos x\, dx}_{\operatorname{sen} x|_0^{\pi/4}}\right] + 2\pi\left[x \operatorname{sen} x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx}_{\cos x|_{\pi/4}^{\pi/2}}\right]$$

1.0
$$= 2\pi\left[-\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] + 2\pi\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$= 2\pi\left[-\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right] = \cancel{2}\pi\left[\frac{\pi}{\cancel{2}} - \frac{\pi}{\cancel{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

0.5
$$V_{oy}(A_2) = \pi^2\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 / Cálculo Diferencial e Integral / 2014-1

[CONTROL #2]

Viernes 9 de mayo de 2014

Profesor: Raúl Uribe
Profesores auxiliares: Néstor Jofré / Patricio Santis
Ayudantes: Rodrigo González / Elisa Kauffmann / Pedro Sanhueza

P1. Calcular las primitivas e integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$ (Hint: Completar el cuadrado del binomio)

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4+3\cos x}$ (Hint: Sustitución $t = \tan\frac{x}{2}$)

(c) $\displaystyle\int (\arcsin x)^2 dx$ (Hint: Dos veces por partes)

P2. (Integral de Riemann y Teorema Fundamental del Cálculo)

(a) Calcular el siguiente límite L mediante la noción de Sumas de Riemann y el concepto de Integral Definida:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$$

(b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^{x^3} e^{u^2}du}{\displaystyle\int_0^{x}\sin(u^2)du}$

(c) Sea f una función continua y sean F, G las funciones definidas por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad G(x) = \int_0^x f(t^2)dt$$

Demostrar que $\displaystyle\int_0^a G(x)dx = aG(a) - \frac{1}{2}F(a^2)$.

P3. (Aplicaciones)

Dada la función $y = a\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, con $x \in [0, L]$, calcular:

(a) El área de la región R encerrada bajo la curva en $[0, L]$ y el eje OX.

(b) El volumen del sólido que se forma al rotar la región R en torno del eje OY.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1002 / Cálculo Diferencial e Integral / 2014-1

[Pauta Control #1]

Viernes 11 de abril de 2014

Profesor: Raúl Uribe
Profesores auxiliares: Néstor Jofré / Patricio Santis
Ayudantes: Rodrigo González / Elisa Kauffmann / Pedro Sanhueza

P1. Calcular las primitivas e integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$ (Hint: Completar el cuadrado del binomio) **(2 ptos.)**

Sol.:

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx = \int \frac{3x+2}{\sqrt{9-(x+2)^2}}\,dx \quad // \text{(Completación de cuadrado de binomio)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}}\,dx \leftarrow \boxed{\text{C.V. } \frac{x+2}{3} = \sin u \Rightarrow \begin{cases} x = 3\sin u - 2 \\ u = \arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right) \\ dx = 3\cos u du \end{cases}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3(3\sin u - 2)+2}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \cdot 3\cos u du$$

$$= \int \frac{9\sin u - 4}{\cancel{\cos u}} \cdot \cancel{\cos u} du$$

$$= -9\cos u - 4u + C$$

$$= -9\cos\left(\arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right)\right) - 4\arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right) + C \blacksquare$$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4+3\cos x}$ $\left(\text{Hint: Sustitución } t = \tan\frac{x}{2}\right)$ **(2 ptos.)**

Sol.: Considerando el Hint, se tiene que

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4+3\cos x} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4+3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2dt}{7+t^2} \\
&= \frac{2}{7}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{7}\right)^2} \leftarrow \boxed{\text{C.V. } v = \frac{t}{\sqrt{7}} \Rightarrow \begin{cases} dt = \sqrt{7}dv \\ t = 0 \Rightarrow v = 0 \\ t = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{21}}{21} \end{cases}} \\
&= \frac{2}{7}\int_0^{\frac{\sqrt{21}}{21}} \frac{\sqrt{7}dv}{1+v^2} \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7} \arctan v \Big|_0^{\frac{\sqrt{21}}{21}} \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{\sqrt{21}}{21}\right) \blacksquare
\end{aligned}
$$

(c) $\int(\arcsin x)^2dx$ (Hint: Dos veces por partes) **(2 ptos.)**

Sol.:

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{(\arcsin x)^2}_{u} \underbrace{dx}_{dv} &= x(\arcsin x)^2 - \int \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}xdx \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int \underbrace{\arcsin x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}}_{\substack{dv \\ \uparrow \\ \boxed{\text{cv: } y = 1-x^2}}} \\
&= x(\arcsin x)^2 - \left(\arcsin x \cdot -2\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-2\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}dx\right) \\
&= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C \blacksquare
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{P2.}}$ (Integral de Riemann y Teorema Fundamental del Cálculo)

(a) Calcular el siguiente límite L mediante la noción de Sumas de Riemann y el concepto de Integral Definida:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right) \quad \textbf{(2 ptos.)}$$

Sol.: Se debe notar que L se puede escribir como:

$$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \quad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

Tomando $x_i = \frac{i}{n}$, se tiene que $a = 0$ y $b = 1$ **(0.3 ptos.)**. Además $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ **(0.3 ptos.)**.

[1] En consecuencia, se tendrá la función $f(x_i) = \dfrac{1}{1+x_i}$ **(0.3 ptos.)**. [2] Por lo tanto, el valor de L es

$$L = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln(2) \quad \textbf{(0.6 ptos.)}$$

(b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^3} e^{u^2} du}{\displaystyle\int_0^{x} \sin(u^2) du}$ **(2 ptos.)**

Sol.: Se tiene que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{u^2} du}{\int_0^{x} \sin(u^2) du} \to \frac{[0]}{[0]} \quad \textbf{(0.3 ptos.)}$$

Dado se cumple con el TFC, ya que las funciones dentro de la integral son continuas, se puede aplicar L'Hôpital **(0.5 ptos.)**. En consecuencia,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{u^2} du}{\int_0^{x} \sin(u^2) du} \underbrace{=}_{L'H\hat{o}pital} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^6}\cdot 3x^2}{\sin(x^2)} \to \frac{[0]}{[0]} \quad \textbf{(0.4 ptos.)}$$

Nuevamente, se puede aplicar L'Hôpital ya que las funciones son derivables y continuas, en efecto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^6}\cdot 3x^2}{\sin(x^2)} \underbrace{=}_{L'H\hat{o}pital} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^6}\cdot 18x^7 + e^{x^6}\cdot 6x}{\cos(x^2)\cdot 2x} \to \frac{[0]}{[0]} \quad \textbf{(0.4 ptos.)}$$

Otra vez, L'Hôpital,

$$\underbrace{=}_{L'H\hat{o}pital} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^6}\cdot 108x^{12} + e^{x^6}126x^6 + e^{x^6}\cdot 36x^6 + e^{x^6}\cdot 6}{\cos(x^2)\cdot 2 - \sin(x^2)4x^2} \to 3 \;\blacksquare \quad \textbf{(0.4 ptos.)}$$

(c) Sea f una función continua y sean F, G las funciones definidas por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad G(x) = \int_0^x f(t^2)dt$$

Demostrar que $\displaystyle\int_0^a G(x)dx = aG(a) - \frac{1}{2}F(a^2)$. **(2 ptos.)**

Sol.: Aplicando integración por partes para $\displaystyle\int_0^a G(x)dx$,

$$\begin{aligned} u = G(x) &\;\Rightarrow\; du = G'(x)dx \\ dv = dx &\;\Rightarrow\; v = x \end{aligned}$$

Así,

$$\int_0^a G(x)dx = xG(x)\Big|_0^a - \int_0^a xG'(x)dx \quad \textbf{(0.5 ptos)}$$

Donde $G'(x) = f(x^2)$ y $xG(x)\Big|_0^a = aG(a) - 0$ **(0.5 ptos.)**. Entonces queda,

$$\int_0^a G(x)dx = aG(a) - \int_0^a xf(x^2)dx$$

---

[1]Esto es dado que: $x_i = a + i\dfrac{(b-a)}{n}$ y $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$

[2]Si se escogía $x_i = 1 + \dfrac{i}{n}$, se tiene que $a = 1$, $b = 2$ y $f(x) = \dfrac{1}{x}$, pero el resultado es el mismo.

Realizando un cambio de variable para $\int_0^a xf(x^2)dx$, con $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$ **(0.5 ptos.)**. Reemplazando

$$\int_0^a xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} f(t) = \frac{1}{2}F(a^2)$$

Por lo tanto,

$$\int_0^a G(x)dx = aG(a) - \frac{1}{2}F(a^2) \blacksquare \quad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

$\boxed{\text{P3.}}$ (Aplicaciones)

Dada la función $y = a\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$, con $x \in [0, L]$, calcular:

(a) El área de la región R encerrada bajo la curva en $[0, L]$ y el eje OX. **(2 ptos.)**

Sol.: Como $x \in [0, L]$ se tiene que $\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) > 0 \Rightarrow |y| = y$ **(0.5 ptos.)**, en consecuencia el área R se calcula como:

$$A_R = \int_0^L |y|dx = \int_0^L a\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = a\cdot\left(-\frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)\Big|_0^L = a\cdot\left(-\frac{L}{\pi}(-1-1)\right) = \frac{2aL}{\pi} \blacksquare$$

(1.5 ptos)

(b) El volumen del sólido que se forma al rotar la región R en torno del eje OY. **(4 ptos.)**

Sol.: Para calcular el volumen en torno al eje OY se utiliza la fórmula:

$$V_{OY} = 2\pi\int_0^L x\cdot|y|dx = 2a\pi\int_0^L x\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx \quad \textbf{(1 pto.)}$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} u = x \quad &\Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx \quad &\Rightarrow \quad v = -\frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad \textbf{(1 pto.)}$$

Reemplazando,

$$V_{OY} = 2a\pi\left[x\cdot\left(-\frac{L}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)\Big|_0^L + \frac{L}{\pi}\int_0^L \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx\right] = 2a\pi\left[\frac{L^2}{\pi} + \frac{L^2}{\pi^2}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)\Big|_0^L\right]$$

$$\therefore V_{OY} = 2aL^2 \blacksquare \quad \textbf{(2 ptos.)}$$

Control 2

P1. i) (2,0 ptos.) Calcule la primitiva

$$\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$$

ii) (2,0 ptos.) Calcule la integral

$$\int_{4\sqrt{2}}^{9\sqrt{3}} \frac{dx}{x-x^{3/5}}$$

ii) (2,0 ptos.) Sea

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pruebe que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$.

P2. Sea $k \in \mathbb{R}^+$. Considere la función F definida en $[0,\infty)$ por

$$F(x) = \int_0^1 s^k \operatorname{sen}(sx)ds$$

i) (1,0 pto.) Demuestre que $\forall x > 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x t^k \operatorname{sen}(t)dt$$

ii) (2,0 ptos.) Probar que F es derivable en $[0,\infty)$ para lo cual justifique la derivabilidad de F en $(0,\infty)$ y calcule $F'(0)$ usando la definición.

iii) (1,5 ptos.) Demuestre que $\forall x \in [0,\infty)$ se verifica que

$$xF'(x) + (k+1)F(x) = \operatorname{sen}(x)$$

iv) (1,5 ptos.) Explique porqué $F'(x)$ es continua en $(0,\infty)$ (use $F'(x)$ de iii)) y demuestre que $F'(x)$ es también continua en $x = 0$ (use la definición).

P3. Considere la función f definida por

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

con $f(x) \geq 0$.

a) i) (1,0 pto.) Calcule el área de la región limitada por la curva $f(x)$ ($f(x) \geq 0$), el eje OX y los ceros de f.

ii) (2,5 ptos.) Calcule el volumen del sólido generado por la revolución en torno al eje OY de la región descrita en a) i).

Indicación: Observe que f es una función PAR.

b) (2,5 ptos.) Calcule el volumen del sólido generado por la revolución en torno al eje OX del área plana limitada por las curvas de ecuaciones

$$x + y = 5 \text{ y } xy = 4$$

Justifique cada uno de sus pasos

Tiempo: 3:00

Control 2 - MA1002 - 2014-02

Pauta Problema 1

i) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$ Fracciones Parciales

$$\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)\overbrace{(x-1)^2}^{x^2-2x+1}}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

(0.5)

Así

coef x^3 : $A+C=0$

coef x^2 ; $-A+B-2C+D=1$

coef x : $A+C-2D=-2$

cte ; $-A+B+D=3$

$\Rightarrow$ $A=-1$, $B=1$, $C=1$, $D=1$

(0.5)

Así $$\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

(1.0)

$$\Rightarrow \int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = -\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$$

ii) $\displaystyle\int_{4\sqrt{2}}^{9\sqrt{3}} \frac{dx}{x-x^{3/5}}$ Por sustitución $x=t^5$, $dx=5t^4\,dt$

$x=4\sqrt{2}=2^{5/2}=t^5 \Rightarrow t=\sqrt{2}$

$x=9\sqrt{3}=3^{5/2}=t^5 \Rightarrow t=\sqrt{3}$

(1.0)

(1.0) Así

$$\int_{4\sqrt{2}}^{9\sqrt{3}} \frac{dx}{x-x^{3/5}} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5\cancel{t^4}\,dt}{\underbrace{t^5-t^3}_{\cancel{t^3}(t^2-1)}} = 5\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t\,dt}{t^2-1} = \frac{5}{2}\left[\ln|t^2-1|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{5}{2}\ln(2)$$

iii) $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/4} tg^n(x)\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

Una forma puede ser el reemplazo directo en I_n+I_{n-2}.

En efecto $$I_n+I_{n-2}=\int_0^{\pi/4} tg^n(x)\,dx+\int_0^{\pi/4} tg^{n-2}(x)\,dx = \int_0^{\pi/4}\left(tg^n(x)+tg^{n-2}(x)\right)dx$$

(0.5)

$$= \int_0^{\pi/4} tg^{n-2}(x)\underbrace{\left(tg^2(x)+1\right)}_{\sec^2 x}dx = \int_0^{\pi/4} tg^{(n-2)}(x)\sec^2(x)\,dx = \int_0^1 u^{n-2}\,du \quad \begin{cases} u=tg(x) \\ \frac{du}{dx}=\sec^2(x)\end{cases}$$

$$= \frac{u^{n-1}}{n-1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{n-1} \longrightarrow$$ (1.5)

Pauta Problema 2

$F(x) = \int_0^1 s^k \operatorname{sen}(sx)\,ds \qquad k \in \mathbb{R}^+$, F definida en $[0,\infty)$

i) Por sustitución sea $t = sx$, $dt = x\,ds$ $\begin{cases} s=0 \to t=0 \\ s=1 \to t=x \end{cases}$

(1.0) $\Rightarrow F(x) = \int_0^x \frac{t^k}{x^k} \operatorname{sen}(t) \frac{dt}{x} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x t^k \operatorname{sen}(t)\,dt$

ii) $t^k \operatorname{sen}(t)$ es continua en $(0,\infty)$ por ser producto de continuas.
Entonces por T.F.C. $\int_0^x t^k \operatorname{sen}(t)\,dt$ es derivable en $(0,\infty)$.
Además x^{k+1} es derivable en $(0,\infty)$ y por lo tanto $F(x) = \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x t^k \operatorname{sen} t\,dt$

(1.0) es derivable en $(0,\infty)$ (cuociente de derivables)

Además $F'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h) - \overbrace{F(0)}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{h^{k+1}}\int_0^h t^k \operatorname{sen}(t)\,dt\right]$ con $F(0)=0$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h t^k \operatorname{sen}(t)\,dt}{h^{k+2}} \overset{L'Hop}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^k} \operatorname{sen}(h)}{(k+2)h^{\cancel{k+1}}} = \frac{1}{k+2}\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = \frac{1}{k+2}$ (T.F.C.)

(1.0) Sigue que $F'(0) = \frac{1}{k+2} \Rightarrow F$ es derivable en $[0,\infty)$

iii) Calculamos $F'(x)$ de $F(x) = \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x t^k \operatorname{sen}(t)\,dt$

$\Rightarrow F'(x) = \frac{\left(\int_0^x t^k \operatorname{sen} t\,dt\right)' x^{k+1} - \left(\int_0^x t^k \operatorname{sen}(t)\,dt\right)(k+1)x^k}{x^{2k+2}} \Rightarrow$

$F'(x) = \frac{\overbrace{\cancel{x^k} \operatorname{sen} x}^{T.F.C.} \cdot x^{k+1} - (k+1)x^k \int_0^x t^k \operatorname{sen}(t)\,dt}{x^{2k+2}} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \frac{(k+1)}{x}\overbrace{\frac{1}{\cancel{x}^{k+1}}\int_0^x t^k \operatorname{sen} t\,dt}^{F(x)}$

(1.0) (0.5) $\Rightarrow F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} - (k+1)\frac{F(x)}{x} \iff x F'(x) + (k+1)F(x) = \operatorname{sen} x$

iv) $F'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} - (k+1)\frac{F(x)}{x}$ es continua en $(0,\infty)$ por álgebra de continuas

(0.5) (x, $\operatorname{sen} x$, $F(x)$, cuocientes y sumas lo son).

Continuidad de F' en $x=0$: $\lim_{x\to 0} F'(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} - (k+1)\frac{F(x)}{x}\right] =$

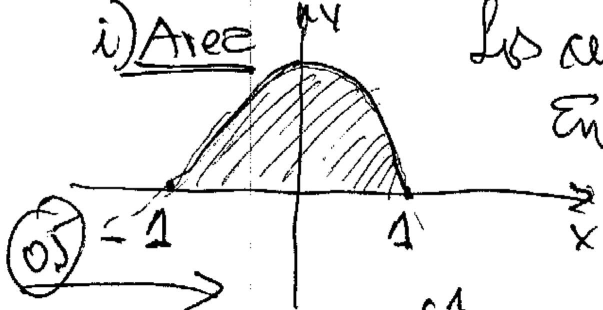
(1.0) $1 - (k+1)\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = 1-(k+1)\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^k \operatorname{sen}(t)\,dt}{x^{k+2}} \overset{L'H}{=} 1 - \frac{k+1}{k+2}\frac{\cancel{x^k} \operatorname{sen} x}{x^{\cancel{k+1}}} \to 1 - \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2} = F'(0)$

$\Rightarrow F$ es continua en 0 //

Pauta Problema 3

a) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $f(x)\geq 0$

i) Area



Las curvas f son $[-1,1]$ y f es función PAR

Entonces Area $= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$

(0.5) $\Rightarrow A = 2\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$

$\Rightarrow A = 2\int_0^1 \left[\frac{2}{1+x^2}-1\right]dx = 2\left[2\operatorname{arctg} x - x\right]_0^1 = 2\left[2\frac{\pi}{4}-1\right]$

(0.5) $\Rightarrow A = \pi - 2$

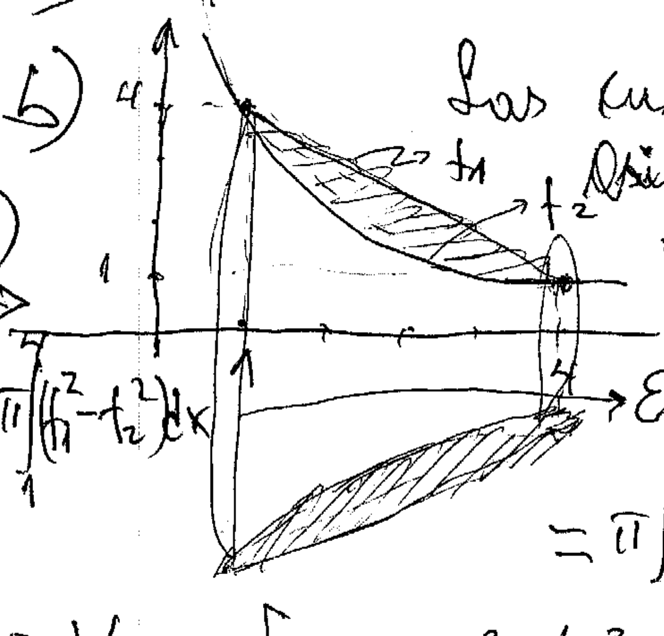
ii) Volumen de Revolución entorno al eje Oy

(1.0) $V_{oy} = 2\pi\int_0^1 x f(x)\,dx = 2\pi\int_0^1 x\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 x\left[\frac{2}{1+x^2}-1\right]dx$

$= 2\pi\int_0^1\left[\frac{2x}{1+x^2}-x\right]dx = 2\pi\left[\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 2\pi\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$

(1.5) o bien $V_{oy} = \pi(2\ln 2 - 1)$

b) Las curvas son $x+y=5 \wedge xy=4$



Así $y=5-x \Rightarrow x(5-x)=4 \Rightarrow x^2-5x+4=0$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1,\ y=4 \\ x=4,\ y=1 \end{array}\right\}$ Ptos de $\cap$.

(1.0)

$V_{ox}=\pi\int_1^4 (f_1^2-f_2^2)\,dx$

Entonces $V_{ox} = \pi\int_1^4\left[(5-x)^2-\frac{16}{x^2}\right]dx$

$= \pi\int_1^4\left[25-10x+x^2-\frac{16}{x^2}\right]dx$

$\Rightarrow V_{ox} = \pi\left[25x-5x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{16}{x}\right]_1^4 = \pi\left[\cancel{100-80}+\frac{1}{3}64+4-(\cancel{20}+\frac{1}{3}+16)\right]$

(1.5) $\Rightarrow V_{ox} = 9\pi$

MA1002 / Cálculo Diferencial e Integral / 2014-3

CONTROL N° 2

PROFESOR DE CÁTEDRA: Raúl Uribe

PROFESORES AUXILIARES: Néstor Jofré / Braulio Sánchez

AYUDANTES: Felipe Atenas / Nicolás Godoy / Rodrigo González / Cristian Parra

Jueves 8 de Enero de 2015

P1. Calcular las primitivas e integrales que se indican:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-\sqrt[4]{2x+1}}$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

HINT: Aplicar cambios de variable.

P2. Sea la integral $B_{n,m}=\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n x^m\,dx$.

(a) Probar que se cumple la relación de recuerrencia $B_{n,m}=\dfrac{n}{m+1}B_{n-1,m+1}$, $\forall n,m,\ n>1$.

(b) Aplicar esta relación para calcular el valor de la integral $B_{n,m}$.

P3. (a) Calcular el límite $L=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\left(\frac{\pi i}{n}\right)^2\right)$, identificando la expresión como una suma de Riemann y la integral correspondiente.

(b) Calcular el límite

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e(x^2-\pi^2)+\pi\displaystyle\int_{x^2}^{\pi^2}\frac{e^{\sin\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)}}{\sqrt{t}}\,dt}{1+\cos x}$$

P4. (a) Determinar la función que satisface la relación

$$6(x^3-1)f(x)-18\int_0^x t^2 f(t)\,dt=8x^3+3x^2+6x,$$

con la condición $f(2)=0$.

(b) Calcular los valores de $F(x)$ y $F'(x)$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$ para la función F que satisface la relación

$$\int_0^x vF(v)\,dv = \sin x - \cos x$$

.

(c) Calcular $g(4)$ si $x\sin(\pi x) = \displaystyle\int_0^{x^2} g(u)\,du$.

Tiempo: 3:00 hrs.

Pauta P2C2

Sea $B_{n,m} = \int_0^1 (1-x)^n x^m dx$

(i) PDQ $\forall n, m, n \geq 1$: $B_{n,m} = \frac{n}{m+1} B_{n-1,m+1}$

Sol Integrando por partes:

$u = (1-x)^n \Rightarrow du = n(1-x)^{n-1}(-1)dx$

$dv = x^m dx \Rightarrow v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

Luego:
$$B_{n,m} = (1-x)^n \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{m+1}}{m+1} n (1-x)^{n-1} dx$$
$$= 0 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 (1-x)^{n-1} x^{m+1} dx = \frac{n}{m+1} B_{n-1,m+1}.$$

(ii) Aplicar (i) para calcular $B_{n,m}$.

Sol por la parte anterior, tenemos que:
$$B_{n,m} = \frac{n}{m+1} B_{n-1,m+1} = \frac{n}{m+1}\left(\frac{n-1}{m+2} B_{n-2,m+2}\right)$$
$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot \ldots \cdot \frac{2}{m+(n-1)} B_{1,m+(n-1)}$$

Además:
$$B_{1,m+n-1} = \int_0^1 (1-x)^1 x^{m+n-1} dx$$
$$= \int_0^1 x^{m+n-1} dx - \int_0^1 x^{m+n} dx = \frac{x^{m+n}}{m+n}\Big|_0^1 - \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{m+n} - \frac{1}{m+n+1}.$$

$$\Rightarrow B_{n,m} = \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1)}\Bigg[\underbrace{\frac{1}{m+n} - \frac{1}{m+n+1}}_{\frac{\cancel{m+n}+1-\cancel{m}-\cancel{n}}{(m+n)(m+n+1)} = \frac{1}{(m+n)(m+n+1)}}\Bigg]$$

$$= \frac{n!}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n+1)} = \frac{n!\,m!}{(m+n+1)!}$$ ∎

Control 2 - MA1002

Semestre otoño 2015

Profesor: Raúl Uribe
Profesor auxiliar: Patricio Santis
Profesores ayudantes: Cristián Lira, Vicente Olguín

Problema 1 (Integral de Riemann)

i) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Calcular la integral superior y la integral inferior de la función.

ii) Calcular el siguiente límite, mediante una suma de Riemann apropiada,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{a}{n} + \sin\frac{2a}{n} + ... + \sin\frac{na}{n}\right]$$

Problema 2 (Teorema Fundamental del Cálculo)

a) Calcular $y' = \frac{dy}{dx}$ siendo $y = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{12} v^{-1} dv$

b) Determinar una función g y un real $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_a^x ug(u)du = \sin(x) - x\cos(x) - \frac{1}{2}x^2$$

Problema 3 (Primitivas e integrales)

- Calcular la primitiva $I = \displaystyle\int (\arcsin(x))^2$
- Calcular la siguiente integral racional $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x+5}{(x^2+x+1)^2}$

Pauta Control 2 - MA1002

Semestre otoño 2015

Profesor: Raúl Uribe
Profesor auxiliar: Patricio Santis
Profesores ayudantes: Cristián Lira, Vicente Olguín

Problema 1 (Integral de Riemann)

i) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Calcular la integral superior y la integral inferior de la función.

ii) Calcular el siguiente límite, mediante una suma de Riemann apropiada,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{a}{n} + \sin\frac{2a}{n} + ... + \sin\frac{na}{n}\right]$$

Solución problema 1

i) Es importante notar que la función está definida en el intervalo $x \in [0,1]$. Para calcular la integral superior e inferior de la función se debe notar que para los intervalos:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] : \begin{cases} \sup(f): & 1-x \\ \inf(f): & x \end{cases} \quad \textbf{(0.5 pto)}$$

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right] : \begin{cases} \sup(f): & x \\ \inf(f): & 1-x \end{cases} \quad \textbf{(0.5 pto)}$$

En consecuencia, la integral superior:

$$\begin{aligned} \overline{\int_0^1} f(x) &= \int_0^{1/2} (1-x)dx + \int_{1/2}^1 xdx \quad \textbf{(0.5 pto)} \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{1/2}^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) - (0-0) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{3}{4} \quad \textbf{(0.5 pto)} \end{aligned}$$

Y la integral inferior:

$$\begin{aligned}\underline{\int_0^1} f(x) &= \int_0^{1/2} x dx + \int_{1/2}^1 (1-x)dx \quad \textbf{(0.5 pto)}\\ &= \frac{x^2}{2}|_0^{1/2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^1\\ &= \left(\frac{1}{8} - 0\right) + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)\right]\\ &= \frac{1}{4} \quad \textbf{(0.5 pto)}\end{aligned}$$

ii) Se debe notar que el límite se puede escribir como:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\frac{a}{n} + \sin\frac{2a}{n} + ... + \sin\frac{na}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(a\frac{i}{n}\right) \quad \textbf{(0.5 pto)}$$

Tomando $x_i = \dfrac{i}{n}$, se tiene que $a = 0$ y $b = 1$ **(0.5 pto)**. Además, $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$ **(0.5 pto)** [1]. En consecuencia se tendra la función $f(x_i) = \sin(a \cdot x_i)$ **(0.5 pto)** [2]. Por lo tanto el valor del límite tiende a:

$$\int_0^1 \sin(a\cdot x) = -\frac{\cos(ax)}{a}|_0^1 = -\left(\frac{\cos(a)}{a} - \frac{\cos(0)}{a}\right) = -\left(\frac{\cos(a)}{a} - \frac{1}{a}\right) \quad \textbf{(1.0 pto)}$$

Problema 2 (Teorema Fundamental del Cálculo)

a) Calcular $y' = \frac{dy}{dx}$ siendo $y = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{12} v^{-1}dv$

b) Determinar una función g y un real $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$\int_a^x ug(u)du = \sin(x) - x\cos(x) - \frac{1}{2}x^2$$

Solución problema 2

a) **1ra forma**: Se calcula la integral de y. En efecto,

$$y = \int_{\frac{1}{x}}^{12} v^{-1}dv = \ln(v)|_{\frac{1}{x}}^{12} = \ln(12) - \ln(\frac{1}{x}) \qquad \textbf{(1.5 ptos)}$$

Así, calculando $y' = \frac{dy}{dx}$ se llega a:

$$\begin{aligned} y' &= 0 - \frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= +x\cdot\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{1}{x} \qquad \textbf{(1.5 ptos)}\end{aligned}$$

[1] Esto es dado que: $x_i = a + i\dfrac{(b-a)}{n}$ y $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$

[2] Si se escogía $x_i = a\dfrac{i}{n}$, se tiene que $a = 0$, $b = \mathbf{a}$; $\Delta x = \frac{a}{n}$ y $f(x) = \sin(x)$, pero el resultado es el mismo.

2da forma: Dado que v^{-1} es continua en $v \in [\frac{1}{x}, 12]$, para $x > 0$, y es derivable por TFC **(1.0 pto)**. Por lo tanto, se tiene que $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} y' &= \left(12^{-1} \cdot \underbrace{12'}_{=0}\right) - \left(\frac{1}{x}^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) \qquad \textbf{(1.5 ptos)} \\ &= +x \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} \qquad \textbf{(0.5 pto)} \end{aligned}$$

b) Suponiendo que $u \cdot g(u)$ es continua, $\int_a^x ug(u)du$ es derivable por TFC **(0.5 pto)**. Por lo tanto, derivando toda la ecuación con respecto a x:

$$\begin{aligned} \int_a^x ug(u)du &= \sin(x) - x\cos(x) - \frac{1}{2}x^2 \quad / \frac{d}{dx} \\ xg(x) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1} - ag(a) \underbrace{\frac{da}{dx}}_{=0} &= \cos(x) - [\cos(x) - x\sin(x)] - \frac{1}{2}2x \qquad \textbf{(1.0 pto)} \\ xg(x) &= \cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) - x \\ g(x) &= \frac{x\sin(x) - x}{x} \\ \Rightarrow g(x) &= \sin(x) - 1 \qquad \textbf{(0.5 pto)} \end{aligned}$$

Para encontrar un valor de $a \in \mathbb{R}$, se reemplaza en la ecuación $x = a$, en efecto:

$$\underbrace{\int_a^a ug(u)du}_{=0} = \sin(a) - a\cos(a) - \frac{1}{2}a^2 \qquad \textbf{(0.5 pto)}$$

Un valor de a que cumple lo anterior es $a = 0$, ya que $\sin(0) = 0$; $0 \cdot \cos(0) = 0$; y $\frac{1}{2}0^2 = 0$ (esto último no es necesario argumentarlo) **(0.5 pto)**.

Problema 3 (Primitivas e integrales)

i) Calcular la primitiva $I = \displaystyle\int (\arcsin(x))^2$

ii) Calcular la siguiente integral racional $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x+5}{(x^2+x+1)^2}$

Solución problema 3

i) Integrando por partes $\displaystyle\int (\arcsin(x))^2 dx$, se escoge **(0.8 pto)**:

$$\begin{aligned} u = (\arcsin(x))^2 &\Rightarrow du = 2\arcsin(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx &\Rightarrow v = x \end{aligned}$$

Reemplazando en la fórmula de integración por partes **(0.5 pto)**:

$$\begin{aligned}\int (\arcsin(x))^2 dx &= x\cdot(\arcsin(x))^2 - \int x\cdot 2\arcsin(x)\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ \int (\arcsin(x))^2 dx &= x\cdot(\arcsin(x))^2 - 2\int \arcsin(x)\cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{aligned}$$

Calculando nuevamente por partes la segunda integral ($\int \arcsin(x)\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$) [3] **(0.8 pto)**:

$$\begin{aligned} u=\arcsin(x) \quad &\Rightarrow \quad du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ dv=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad &\Rightarrow \quad v=-\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Reemplazando **(0.5 pto)**,

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -\sqrt{1-x^2}\arcsin(x) - \int \frac{-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx\\ &= -\sqrt{1-x^2}\arcsin(x) - \int -1dx\\ &= -\sqrt{1-x^2}\arcsin(x) + x\end{aligned}$$

Por lo tanto **(0.4 pto)**,

$$\int (\arcsin(x))^2 dx = x\cdot(\arcsin(x))^2 - 2\left[-\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)+x\right] + cte^4$$

ii) Separando la integral en dos partes:

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+5}{(x^2+x+1)^2} &= \int\frac{3(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} + \int\frac{2}{(x^2+x+1)^2}\\ &= 3\underbrace{\int\frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}}_{(1)} +2\underbrace{\int\frac{1}{(x^2+x+1)^2}}_{(2)}\end{aligned}$$

Así (1) se resuelve mediante el cambio de variable $u=x^2+x+1 \to du=(2x+1)dx$, en consecuencia:

$$\begin{aligned}\int\frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}dx &\underbrace{=}_{u=x^2+x+1} \int\frac{du}{u^2}\\ &= \frac{u^{-1}}{-1}\\ &= -\frac{1}{u}\\ \Rightarrow \int\frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}dx &= -\frac{1}{x^2+x+1} \qquad \textbf{(0.5 pto)}\end{aligned}$$

[3]Para obtener el valor de v, se calcula $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ con el cambio de variable $y=1-x^2$, o bien, dandosé cuenta que lo del numerador es la derivada del denominador

[4]Si no se encuentra la constante de integración se descuenta 0.3 pto.

Para calcular (2), se completa el cuadrado de binomio del numerador:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx &= \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{3/4}+1\right)^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{\frac{2x+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2}
\end{aligned}
$$

Realizando el cambio de variable $u=\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \to du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Leftrightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}du$. Reemplazando:

$$
\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\int \frac{du}{(u^2+1)^2} \qquad \textbf{(0.5 pto)}
$$

Para esta última, realizando el cambio de variable $u=\operatorname{tg}(y) \to du = (1+\operatorname{tg}(y)^2)dy = (1+u^2)dy \Leftrightarrow dy = \frac{du}{(1+u^2)}$. Reemplazando,

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\int \frac{du}{(u^2+1)^2} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\int \frac{dy}{(\operatorname{tg}(y)^2+1)} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\int \frac{dy}{\sec(y)^2} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\int \cos(y)^2 \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{2}y+\frac{\sin(2y)}{4}\right) \qquad \textbf{(0.5 pto)}
\end{aligned}
$$

Ahora, volviendo a las variables originales y notando que si $u=\operatorname{tg}(y) \Rightarrow \cos(y)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$, $\sin(y)=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ y $y=\arctan(u)$ **(0.5 pto)**

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{2}y+\frac{\sin(2y)}{4}\right) &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{2}y+\frac{2\sin(y)\cos(y)}{4}\right) \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\arctan(u)+\frac{u}{2(1+u^2)}\right) \\
&\underbrace{=}_{\text{reemplazando por } u=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})+\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{2(1+(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2)}\right)
\end{aligned}
$$

Ahora, sumando (1) y (2), y un poco de álgebra se llega a que **(0.5 pto)**:

$$\int \frac{6x+5}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4x-7}{3(x^2+x+1)} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + cte$$

Por último, evaluando en 0 y 1 **(0.5 pto)**,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{6x+5}{(x^2+x+1)^2} &= \frac{4x-7}{3(x^2+x+1)} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})|_0^1 \\ &= 2 + \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi\end{aligned}$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cáculo diferencial 15-1

Control 2

P1. *a*) (3 ptos) Encuentre un polinomio $p(x)$ tal que

$$|\sqrt{1+x^2} - p(x)| \leq 10^{-5}$$

para $|x| \leq \frac{1}{10}$.

b) (3 ptos) Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciables con g cóncava y estrictamente creciente. Demuestre que si $g \circ f$ es convexa entonces f es convexa.

P2. Considere la función

$$f(x) = \left(\frac{4-x}{x}\right)e^{x}.$$

a) (1,5 ptos) Determine el domino, asíntotas de todo tipo y los ceros de f.

b) (2 ptos) Calcule f' y determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Encuentre los puntos crı́ticos y clasifícalos.

c) (1,5 ptos) Encuentre los intervalos de convexidad y concavidad de f.

d) (1 pto) Esboce el gráfico de f.

P3. *a*) (3 ptos.) Calcule la primitiva de

$$f(x) = e^{\cos 2x} \cos^2 x \sin 2x.$$

b) (3 ptos) Use el teorema de cambio de variables para calcular:

$$\int \frac{e^{x}\, dx}{(e^{3x} - 1)}.$$

Justifique cada una de sus respuestas
Tiempo: 3:00 hrs.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cáculo diferencial 15-1

Control 2

P1. *a)* (3 ptos) Encuentre un polinomio $p(x)$ tal que

$$|\sqrt{1+x^2} - p(x)| \leq 10^{-5}$$

para $|x| \leq \frac{1}{10}$.
Utilizando el polinomio de Taylor en torno a a:

$$P_{n,f}(x) = \sum_{i=0}^{n} f^i(a)\frac{(x-a)^i}{i!}$$

Y el error cometido puede acotarse por:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

(0,5 ptos)
Con $\xi \in [a - x_0, a + x_0]$ donde x_0 el punto donde quiero aproximar la función.
Calculamos el polinomio de Taylor alrededor de 0, para lo que necesitamos calcular las derivadas de orden hasta $n =$?:

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & f'(0) = 0,\\
f''(x) =& \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}, & f''(0) = 1\\
f'''(x) =& \frac{-3x}{(1+x^2)^{5/2}}, & f'''(0) = 0\\
f^{(iv)}(x) =& \frac{3(4x^2-1)}{(1+x^2)^{7/2}}, & f^{(iv)}(0) = -3
\end{aligned}$$

(0,5 ptos)
Antes de seguir calculando derivadas, veamos si para la cuarta ya tenemos que el error es menor de lo solicitado:
Si $\xi \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ tenemos que:

$$R_3(x) = \frac{\frac{3(4\xi^2-1)}{(1+\xi^2)^{7/2}}(x)^4}{4!}$$

$$\left|\frac{3(4\xi^2-1)(x)^4}{(1+\xi^2)^{7/2}4!}\right| \leq \left|\frac{3(4\xi^2-1)(x)^4}{(1+\xi^2)^{7/2}4!}\right| \leq \left|\frac{3}{10^4 4!}\right|$$

(0,5) si lo hicieron con este o con el siguiente (si lo hacen directo con 5, para grado cuatro, el punto va completo en esa cuenta.

Claramente todavía necesitamos un término más:

Luego nuestro polinomio es:

$$p(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$$

(1 pto)

Para calcular el resto necesitamos la quinta derivada:

$f^{(v)}(x) = \frac{-15x(x^2-3)}{(1+x^2)^{9/2}}$

Al acotar como antes tenemos que:

$|R_4| \leq \frac{5}{5!10^5} \leq 10^{-5}$ (0,5 ptos)

b) (3 ptos) Sean $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciables con g cóncava y estrictamente creciente. Demuestre que si $g \circ f$ es convexa entonces f es convexa.

Usando regla de la cadena

$$(g \circ f)' = g'(f)f', \quad (g \circ f)'' = g''(f)(f')^2 + g'(f)f''$$

(1 pto) Tenemos $g'(f) > 0$ y $g''(f) < 0$ entonces

(0,5 pto)

$$0 \leq (g \circ f)'' \implies f'' \geq \frac{-g''(f)(f')^2}{g'(f)} \geq 0$$

(1,5 pto)

P2. Considere la función

$$f(x) = \Big(\frac{4-x}{x}\Big)e^{\,x}.$$

a) (1 pto) Determine el domino, asíntotas de todo tipo y los ceros de f.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Asíntota vertical en $x = 0$ (0,2)

con

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty.$$

(0,4)

Asíntota horizontal en $-\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. (0,2) Cero en $x = 4$. (0,2)

b) (2 ptos) Calcule f' y determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Encuentre los puntos crtícos y clasifícalos.

$$f'(x) = -\Big(\frac{x-2}{x}\Big)^2 e^x \leq 0.(1pto)$$

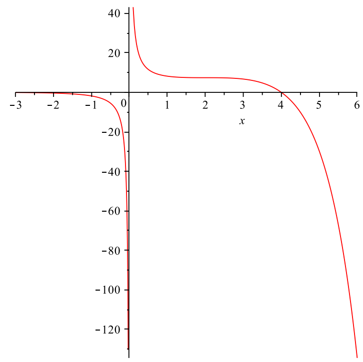
Decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$. (1 pto)

c) (2 ptos) Encuentre los intervalos de convexidad y concavidad de f.

$$f''(x) = -e^x(x^2 - 2x + 1)\Big(\frac{x-2}{x^3}\Big).(1pto)$$

Tenemos $x^2 - 2x + 1 > 0$ para todo x entonces f cóncava en $(-\infty, 0)$ y $(2, \infty)$ y convexa en $(0, 2)$. (1 pto)

d) (1 pto) Esboce el gráfico de f.



2.pdf

P3. *a*) (3 ptos.) Calcule la primitiva de:

$$f(x) = e^{\cos 2x} \cos^2 x \sin 2x.$$

$$\int e^{\cos 2x} \cos^2 x \sin(2x) dx$$

Haciendo el cambio de variables:
$u = \cos(2x), du = -2\sin(2x)dx$

$$\int e^{\cos 2x} \cos^2 x \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} \int e^u (1+u) du$$

(1 pto)
Integrando por partes:

$$-\frac{1}{4} \int e^u (1+u) du = -\frac{1}{4}(e^u (1+u) - \int e^u du) = -\frac{1}{4} e^u u + c = -\frac{1}{4} e^{\cos 2x} \cos^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(2 pto)

b) (3 ptos) Use el teorema de cambio de variables para calcular:

$$\int \frac{e^x \, dx}{(e^{3x} - 1)}.$$

Sea $u = e^x$ luego $du = e^x dx$ (1 pto)

$$\int \frac{e^x \, dx}{(e^{3x} - 1)} = \int \frac{du}{(u^3 - 1)} = \int \frac{du}{(u-1)(u^2+u+1)}$$

(0,5 pto)
Como $u^2 + u + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}$, buscamos $A, B, C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{A}{(u-1)} + \frac{Bu+C}{(u^2+u+1)} = \frac{A(u^2+u+1) + (Bu+C)(u-1)}{(u-1)(u^2+u+1)}$$

BUSCAMOS:

$$1 = A(u^2 + u + 1) + (Bu + C)(u - 1)$$

Evaluando en 1 obtenemos $A = 1/3$
Desarrollando obtenemos:
$B = -1/3, C = -2/3$ (0,5 pto)

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{(u-1)} - \frac{1}{3}\int \frac{udu}{(u^2+u+1)} - \frac{2}{3}\int \frac{du}{(u^2+u+1)} = \frac{1}{3}\log(|(u-1)|) - \frac{1}{6}\log(u^2+u+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2u+1}{\sqrt{3}})$$

$$\frac{1}{3}\log(|(u-1)|) - \frac{1}{6}\log(u^2+u+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2u+1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3}\log(|(e^x-1)|) - \frac{1}{6}\log(e^{2x}+e^x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}(\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}})$$

(1 pto)

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cáculo diferencial 15-2

Control 2

Pregunta 1.

a) Calcule las siguientes integrales:

i) *[2ptos]* $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^3+x^2}dx$ ii) *[2ptos]* $\displaystyle\int \frac{1+\cosh(x)}{\operatorname{senh}^2(x)}dx$

b) *[2ptos]* Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i2^{\frac{i}{n}}\right)$

Pregunta 2.

a) *[3ptos]*Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Demuestre que si $G(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}(x-t)f(t)dt$, entonces $G''(x)\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Sea $f:[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in[0,1) \\ 3 & \text{si } x=1 \\ 2 & \text{si } x\in(1,2] \end{cases}$$

i) *[1ptos]*Para la partición $P=\{0,7/8,1,9/8,2\}$ calcule la suma inferior $s(f,P)$ y la suma superior $S(f,P)$.

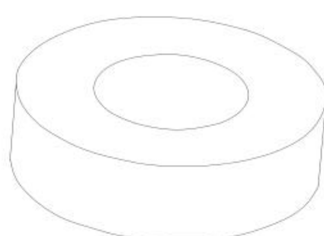
ii) *[2ptos]*Encuentre una partición $P_\epsilon\in\mathcal{P}_{[0,2]}$ tal que para todo ϵ, $0<\epsilon<1$ se cumple $S(f,P)-s(f,P)<\epsilon$.

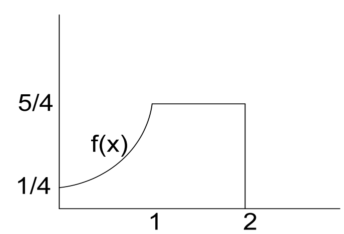
Pregunta 3.

a) *[3ptos]*Dadas las parábolas $C_1: y^2=4-x$ y $C_2: y^2=x$. Considere las regiones R_1, R_2 del primer cuadrante definidas por:

R_1 : área plana entre C_1, C_2 y el eje OY. R_2 : área plana entre C_2, C_1 y el eje OX.

Demuestre que los volúmenes de los sólidos generados por la rotación de ambas regiones con respecto a al eje OX son iguales. Calcule dichos volúmenes.





b) *[3ptos]* Una empresa quiere fabricar jaboneras con la forma que se muestra en la figura.
Un ingeniero modela un corte de la jabonera con las siguientes funciones, $f(x)=x^m+1/4$ e $y=5/4$. Le solicitan que la base sea circular de radio $2cm$ y que su volumen sea de $\frac{22}{5}\pi$. Calcular cuál es el $m\in\mathbb{R}^+$ adecuado para obtener el volumen solicitado como sólido de rotación de las funciones propuestas.

Tiempo: 3 horas.

Cálculo Diferencial 15-2 Control 2

Pauta Problema 1

a) i) $I=\int \frac{x^3+2}{x^3+x^2}\,dx$ dividiendo los polinomios o ajustando se tiene

$$I=\int \frac{x^3+x^2-x^2+2}{x^3+x^2}\,dx=\int\left[1-\frac{x^2-2}{x^2(x+1)}\right]dx = x-\int\frac{x^2-2}{x^2(x+1)}\,dx$$

Fracciones parciales para $\frac{x^2-2}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x^2+x)+Cx^2}{x^2(x+1)}$

1.0 $\Rightarrow$ coef x^2 : $B+C=1$; coef x : $A+B=0$; cte : $A=-2$ $\Rightarrow$ $A=-2$, $B=2$, $C=-1$ $\Rightarrow I = x-\int\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

1.0 $\Rightarrow I = x-\frac{2}{x}-2\ln|x|+\ln|x+1|+C = x-\frac{2}{x}+\ln\frac{|x+1|}{x^2}+C$

ii) $I=\int\frac{1+\cosh(x)}{\operatorname{senh}^2(x)}\,dx$ Se puede usar $\cosh^2(x)-\operatorname{senh}^2(x)=1$

$$\Rightarrow I=\int\frac{1+\cosh(x)}{\cosh^2(x)-1}\,dx=\int\frac{\cancel{1+\cosh(x)}}{(\cancel{\cosh(x)+1})(\cosh(x)-1)}\,dx=\int\frac{dx}{\cosh(x)-1}$$

0.5 Con $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\Rightarrow I=\int\frac{dx}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1}=2\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}-2}$

Sustitución $u=e^x$, $du=e^x dx \Rightarrow dx=\frac{du}{u}$

Así $I=2\int\frac{\frac{du}{u}}{u+u^{-1}-2}\,\Big/\cdot u = 2\int\frac{du}{u^2-2u+1}=2\int\frac{du}{(u-1)^2}=-\frac{2}{u-1}+C$

1.5 Sigue que $I=\int\frac{\cosh(x)+1}{\operatorname{senh}^2(x)}\,dx=-\frac{2}{e^x-1}+C$

OTRA FORMA: Reducir desde el inicio los hiperbólicos a exponenciales

b) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i\,2^{i/n}\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}2^{i/n}\cdot\frac{1}{n}$

de donde $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}\to b-a=1$

$x_i=a+\frac{i}{n}=\frac{i}{n}\Rightarrow a=0,\ b=1$

y $f(x)=x\,2^x$

1.0 Sigue que $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}2^{i/n}\frac{1}{n}=\int_0^1 x\,2^x\,dx$

donde $I=\int_0^1 x\,2^x=\int_0^1 x\,e^{x\ln 2}\,dx=\frac{x}{\ln 2}e^{x\ln 2}\Big|_0^1-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 e^{x\ln 2}\,dx=\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}e^{x\ln 2}\Big|_0^1$

Partes $\begin{cases} u=x\to du=dx \\ dv=e^{x\ln 2}\to v=\frac{1}{\ln 2}e^{x\ln 2}\end{cases}$

1.0 $I=\frac{2}{\ln 2}-\frac{2}{(\ln 2)^2}+\frac{1}{(\ln 2)^2}=\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{(\ln 2)^2}$

Pauta Problema 2

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in C^2(\mathbb{R})$ con $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Demostrar que si

$G(x)=\int_x^{x+1}(x-t)f(t)\,dt$, entonces $G''(x)<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ($G(x)$ es cóncava en $\mathbb{R}$)

Calculamos $G'(x)$ para lo cual $G(x)=\int_x^{x+1}(x-t)f(t)\,dt = x\int_x^{x+1}f(t)\,dt-\int_x^{x+1}t f(t)\,dt$

Así $G'(x)=\int_x^{x+1}f(t)\,dt + x\big(f(x+1)-f(x)\big) - (x+1)f(x+1)+x f(x)$ (Por TFC)

1,0 $\quad = \int_x^{x+1} f(t)\,dt + \cancel{x f(x+1)} - \cancel{x f(x)} - \cancel{x f(x+1)} - f(x+1) + \cancel{x f(x)}$

Así $G''(x)=f(x+1)-f(x)-f'(x+1)$ y como f es continua en $[x,x+1]$ y derivable en $(x,x+1)$, por TVM (para derivadas) $\exists\, \xi\in(x,x+1)$ tal que

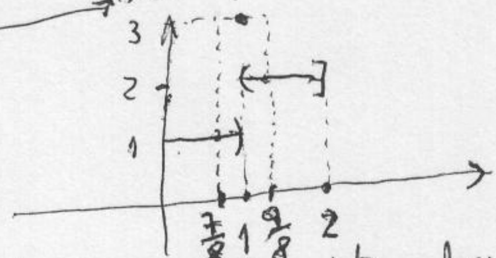
1.0 $\quad f(x+1)-f(x) = f'(\xi)(\cancel{x+1-x}) \Rightarrow f(x+1)-f(x)=f'(\xi)$

Como $f''(x)\geq 0 \Rightarrow f'$ es creciente y $\xi\in(x,x+1)\Rightarrow f'(\xi)<f'(x+1)$

Sigue que $G''(x) = f(x+1)-f(x)-f'(x+1) = f'(\xi)-f'(x+1)<0$

1.0 $\quad$ Así $G''(x)<0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

b) i) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1)\\ 3 & \text{si } x=1\\ 2 & \text{si } x\in(1,2]\end{cases}$



Para $P=\{0,\frac{7}{8},1,\frac{9}{8},2\}$ Es fácil determinar en cada intervalo m_i y M_i

0.5 Así $s(f,P)=\sum_{i=1}^{4} m_i\Delta x_i = 1\left(\frac{7}{8}-0\right)+1\left(1-\frac{7}{8}\right)+2\left(\frac{9}{8}-1\right)+2\left(2-\frac{9}{8}\right) = 3 = \frac{24}{8}$

0.5 $\quad S(f,P)=\sum_{i=1}^{4} M_i\Delta x_i = 1\left(\frac{7}{8}\right)+3\left(1-\frac{7}{8}\right)+3\left(\frac{9}{8}-1\right)+2\left(2-\frac{9}{8}\right) = 3\frac{3}{8} = \frac{27}{8}$

ii) Podemos suponer, como en el caso (i), una partición de la forma $P=\{0,1-\delta,1,1+\delta,2\}$ y determinar δ asociado a $0<\varepsilon<1$

0.5 Así $s(f,P) = 1\cdot(1-\delta)+1\cdot(1-(1-\delta))+2\cdot(1+\delta-1)+2\big(\overbrace{2-(1+\delta)}^{1-\delta}\big) = 1\cancel{-\delta}\cancel{+\delta}\cancel{+2\delta}+2\cancel{-2\delta} = 3$

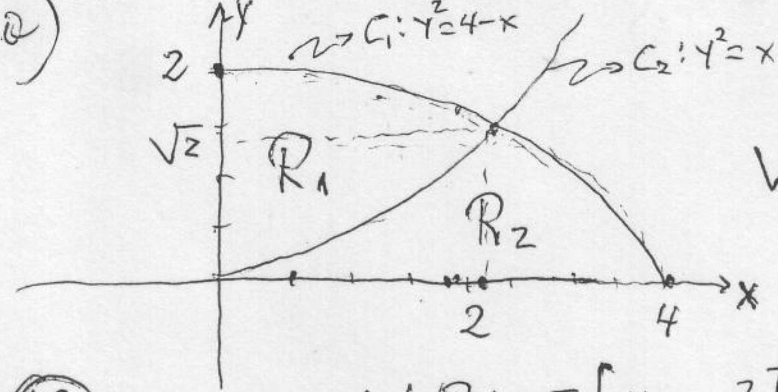
$S(f,P) = 1(1-\delta)+3(1-(1-\delta))+3(1+\delta-1)+2\big(\overbrace{2-(1+\delta)}^{1-\delta}\big) = 1-\delta+3\delta+3\delta+2-2\delta = 3\delta+3$

1.5 Sigue que $S-s = (3\delta+3)-3 = 3\delta$ de modo que $S-s<\varepsilon$ si $3\delta<\varepsilon$, $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$

$\Rightarrow P=\{0,1-\varepsilon/3,1,1+\varepsilon/3,2\}$ $\forall\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$

Pauta Problema 3

a)



$C_1 \cap C_2: y^2 = 4-x = x$

$\Rightarrow x = 2,\ y = \sqrt{2}$

$$V_{ox}(R_1) = \pi \int_0^2 (y_1^2 - y_2^2)\,dx$$

$$= \pi \int_0^2 [(4-x) - x]\,dx = \pi \int_0^2 (4-2x)\,dx$$

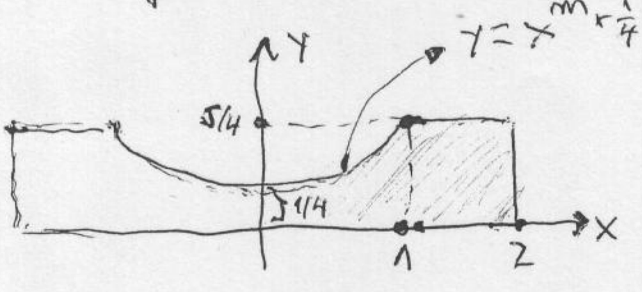
(1.0) $\Rightarrow V_{ox}(R_1) = \pi \left[4x - x^2\right]_0^2 = 4\pi$

$$V_{ox}(R_2) = \pi \int_0^2 y_2^2\,dx + \pi \int_2^4 y_2^2\,dx = \pi \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 (4-x)\,dx$$

$$\Rightarrow V_{ox}(R_2) = \pi \tfrac{1}{2}x^2 \Big|_0^2 + \pi \left[4x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_2^4 = 2\pi + \pi[8-6] = 4\pi$$

(2.0) Así $V_{ox}(R_1) = V_{ox}(R_2) = 4\pi$.

b) Según la figura de la jabonera, un corte central queda según se indica



$\left(x^m + \frac{1}{4}\right) \cap \left(y = 5/4\right) \Rightarrow x^m = 1 \Rightarrow x = 1$

Así, la jabonera se generará por la rotación de la región achurada en torno al eje Oy

(1.0) Así
$$V_{oy} = 2\pi \int_0^1 x\left(x^m + \tfrac{1}{4}\right)dx + 2\pi \int_1^2 x\tfrac{5}{4}\,dx = 2\pi \int_0^1 \left(x^{m+1} + \tfrac{1}{4}x\right)dx + 2\pi \int_1^2 \tfrac{5}{4}x\,dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^2}{8}\right]_0^1 + 2\pi \left[\frac{5}{8}x^2\right]_1^2 = 2\pi \left[\frac{1}{m+2} + \frac{1}{8} + \frac{20}{8} - \frac{5}{8}\right]$$

(1.5) $\Rightarrow V_{oy} = 2\pi \left[\frac{1}{m+2} + 2\right]$ y es necesario que $V_{oy} = \frac{22}{5}\pi$

(0.5) Entonces $\cancel{2\pi}\left[\frac{1}{m+2} + 2\right] = \frac{\cancel{22}\,11}{5\cancel{\pi}} \Rightarrow \frac{1}{m+2} + 2 = \frac{11}{5} \Rightarrow \frac{1}{m+2} = \frac{11}{5} - \frac{10}{5} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow m+2 = 5 \Rightarrow m = 3$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cáculo diferencial 16-1

Control 2, MA1002

P1. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}\, dx.$

(3 ptos.)

b) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2 - 1)\ln(x+1)\, dx.$

(3 ptos.)

Solución:

a) Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2} &= \frac{x^4 + 2x^2}{(x-1)(x^2+2)^2} + \frac{-x^3 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}\\
&= \frac{x^2(x^2+2)}{(x-1)(x^2+2)^2} + \frac{(x-1)(-x^2-x-2)}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{x^2}{(x-1)(x^2+2)} + \frac{(-x^2-x-2)}{(x^2+2)^2}\\
&= \frac{x^2}{(x-1)(x^2+2)} + \frac{(-x)}{(x^2+2)^2} + \frac{(-x^2-2)}{(x^2+2)^2}\\
&= \frac{x^2}{(x-1)(x^2+2)} + \frac{(-x)}{(x^2+2)^2} + \frac{-1}{(x^2+2)}\\
&= \frac{x^2}{(x-1)(x^2+2)} - \frac{x}{(x^2+2)^2} - \frac{1}{(x^2+2)}
\end{aligned}$$

1pto

Veamos cada una de esas integrales

$$\int \frac{1}{(x^2+2)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_1.$$

0,5ptos

Si consideramos $u = x^2 + 2$ entonces $du = 2x\, dx$, luego

$$\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\, du = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{u} + c_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{x^2+2} + c_2 = \frac{-1}{2x^2+4} + c_2.$$

0,5ptos

Veamos ahora la tercera integral, en este caso usaremos las llamadas fracciones parciales y se tiene que

$$\frac{x^2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{bx+c}{x^2+2}$$

de donde se tiene que

$$a + b = 1 \qquad c - b = 0 \qquad 2a - c = 0,$$

es decir

$$a = \frac{1}{3} \qquad b = \frac{2}{3} \qquad c = \frac{2}{3},$$

0,3 ptos

por lo tanto

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{2}{3}\int \frac{x+1}{x^2+2}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{2}{3}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx.$$

→ 0,2 ptos

Así se tiene que

$$\int \frac{dx}{(x-1)} = \ln(x-1) + c_3,$$

→ 0,2 ptos.

Si consideramos nuevamente $u = x^2+2$ entonces $du = 2x\,dx$, luego

$$\int \frac{x}{(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln u + c_4 = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + c_4$$

y

$$\int \frac{1}{(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c_5.$$

→ 0,3 ptos

Por lo tanto tenemos que

$$\int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+2)}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+2)}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{2}{3}\int \frac{x}{x^2+2}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x^2+2}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+2)}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{-1}{2x^2+4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$
$$= \frac{1}{3}\ln(x-1) + \frac{1}{3}\ln(x^2+2) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2x^2+4} + c$$

−0,2 si olvida → la cte de integración

b) Para resolverlo usaremos la integración or partes, en este caso se tiene que si consideramos $u = \ln(x+1)$ y $dv = (3x^2-1)dx$, entonces $du = \frac{1}{x+1}$ y $v = x^3 - x$ y luego

$$\int_0^1 (3x^2-1)\ln(x+1)\,dx = (x^3-x)\ln(x+1)|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x^3-x)}{x+1}dx$$

→ 1 pto

$$= -\int_0^1 \frac{x(x^2-1)}{x+1}dx = -\int_0^1 x(x-1)dx$$

→ 1 pto

$$= -\int_0^1 (x^2-x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

→ 1 pto.

P2. *a*) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b), sea $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$. Sea $n \in \mathbb{N}$, P la partición del intervalo $[a,b]$ definida por los puntos

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \; k = 0, \ldots, n.$$

Definamos

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{(b-a)}{n}.$$

1) Demuestre que

$$\overline{S}(f,P) - \alpha \leq M\frac{(b-a)^2}{n}.$$

(2 ptos.)

2) Demuestre que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \alpha \right| \leq M\frac{(b-a)^2}{n}.$$

(2 ptos.)

b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, una función continua y no negativa en $[a,b]$. Pruebe que si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, entonces $f(x) = 0$, para todo $x \in [a,b]$.

(2 ptos.)

Solución:

a) 1) Recordemos que si definimos $M_k = \text{máx}_{x\in I_k} f(x) = f(y_k)$, con $I_k = [x_{k-1}, x_k]$,

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k\frac{(b-a)}{n},$$

0,5.

luego

$$\overline{S}(f,P) - \alpha = \sum_{k=1}^{n}(M_k - f(x_k))\frac{(b-a)}{n} = \sum_{k=1}^{n}(f(y_k) - f(x_k))\frac{(b-a)}{n}$$

0,5

y del Teorema del valor medio, existe $\xi \in I_k$ tal que

$$f(y_k) = f(x_k) + f'(\xi)(y_k - x_k)$$

0,5.

y se tiene que

$$\overline{S}(f,P) - \alpha = \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) + f'(\xi)(y_k - x_k) - f(x_k))\frac{(b-a)}{n} = \sum_{k=1}^{n} f'(\xi)(y_k - x_k)\frac{(b-a)}{n}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} M\frac{(b-a)^2}{n^2} = nM\frac{(b-a)^2}{n^2} = M\frac{(b-a)^2}{n}.$$

0,5

2) Notemoas que como f es continua, entonces f es integrable y se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f,P) = \int_a^b f(x)dx,$$

0,5.

luego tomando límite $n \to \infty$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx - \alpha \leq M\frac{(b-a)^2}{n}$$

0,5.

Notemos que en forma análoga se tiene que

$$\alpha - \underline{S}(f, P) \leq M\frac{(b-a)^2}{n}$$ 0,5

y nuevamente de la integrabilidad de la función f se tiene que

$$\alpha - \int_a^b f(x)dx \leq M\frac{(b-a)^2}{n}$$ 0,5

lo que completa la demostración.

b) Para demostrar esto lo haremos por contradicción al absurdo. Notemos que la función f es no negativa, veamos que en realidad es la función nula.

0,5 Supongamos que no es nula, luego existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) > 0$. Como f es continua, existe un intervalo $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ en el cual la función f es estrictamente positiva, es decir,

0,5

$$f(x) > d > 0, \forall x \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon],$$

luego

$$0 = \int_a^b f(x)\ dx \geq \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} f(x)\ dx \geq d(c + \varepsilon - c + \varepsilon) = 2d\varepsilon > 0,$$

lo que es unacontradicción.
Por lo tanto $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$. 1 pb

P3. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función continua tal que

$$\int_0^x tf(t)dt = \text{sen}(x) - x\cos x.$$

Calcule $f(\frac{\pi}{2})$ y $f'(\frac{\pi}{2})$.

(3 ptos.)

b) Encuentre una función derivable y no nula $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{sent}{2 + cost}dt.$$

(3 ptos.)

Solución:

a) Como f es continua, podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo y tenemos que

$$xf(x) = \frac{d}{dx}(\text{sen}(x) - x\cos x) = \cos x - \cos x + x\text{sen}(x) = x\text{sen}(x),$$

1 pto (citar TFC).

luego

$$f(x) = \text{sen}(x) \qquad \text{y} \qquad f'(x) = \cos(x)$$

1 pto (calcular derivada)

por lo tanto

$$f(\frac{\pi}{2}) = 1 \qquad \text{y} \qquad f'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

0,5 c/u.

b) Dado que f es continua y derivable, podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo y se tiene que

$$2f(x)f'(x) = f(x)\frac{\text{sen } x}{2 + \cos x}$$

0,5 ptos

y como f es no nula se tiene que

$$2f'(x) = \frac{\text{sen } x}{2 + \cos x} \Longrightarrow f'(x) = \frac{\text{sen } x}{4 + 2\cos x}$$

así se tiene que

$$f(x) = \int \frac{\text{sen } x}{4 + 2\cos x}\, dx,$$

1 pto.

para calcular esta integral usaremos el método de la sustitución, en este caso consideremos

$$u = 4 + 2\cos x \qquad \text{luego} \qquad du = -2\text{sen } x\; dx,$$

así

$$\int \frac{\text{sen } x}{4 + 2\cos x}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\ln u + c = -\frac{1}{2}\ln(4 + 2\cos x) + c,$$

1 pto

luego

$$f(x) = -\frac{1}{2}\ln(4 + 2\cos x) + c.$$

0,5 ptos

(puede omitir la cte de integración).

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cáculo diferencial 15-2

Control 2

Pregunta 1.

a) (3.0 ptos.) Considere la función $F(x)$ definida por:

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2 - 2t}{t^2 + 1} dt$$

Determine sus valores extremos.

b) (3.0 ptos) La función $y = f(x)$ está definida implícitamente por la ecuación:

$$\int_1^x y(t) \cos\left(\frac{\pi}{t}\right) dt + \int_0^{y(x)} \sin(\pi t) dt = \frac{1}{2\pi} \ ; \ \ 0 < y < \frac{1}{2}.$$

Calcule $y(1)$ e $y'(1)$.

Pregunta 2.
Considere la función $f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1) \\ g(x) & \text{si } x \in [1, 3] \end{cases}$$

Con $g(x)$ una función decreciente en $[1, 3]$ que cumple $g(1) = 2$ y $g(3) = 0$. Dado $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$, se pide:

a) (2.5 ptos.) Para la partición $P = \{0, 1 - h, x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ donde $x_i = 1 + ih;\ i = 0, \ldots, n;$ y $h = \frac{2}{n}$. Calcule la suma inferior $s(f, P)$ y la suma superior $S(f, P)$.

b) (2.0 ptos.)Demuestre que:

$$S(f, P) - s(f, P) = h + \sum_{i=1}^{n} (g(x_{i-1}) - g(x_i))h.$$

Calcule la sumatoria y deduzca que f cumple la condición de Riemann indicando para qué valores de h se cumple.

c) (1.5 ptos) En el caso particular de $g(x) = 3 - x$, calcule explícitamente $s(f, P)$ en términos de n y pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} s(f, P) = 3$.

Pregunta 3.

a) (1.5 ptos.) Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + i^2}}$

b) (2.5 ptos) Considere la región R del primer cuadrante encerrada entre la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ y la parábola $y = (x - 2)^2$. Se pide calcular el área de la región R y el volumen de revolución engendrado por R al girar en torno al eje OX.

c) (2.0 ptos) Sabiendo que $f(\pi) = 2$ y que $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \sin(x) dx = 5$. Calcular $f(0)$.

Tiempo: 3 horas.

Calculo Diferencial e Integral (MA 1002)
Control 2 Pauta Problema 1

a) $F(x)=\int_0^x \frac{t^2-2t}{t^2+1}\,dt$. Por TFC calculamos $F'(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+1}=\frac{x(x-2)}{x^2+1}$

(0.5) de donde $F'(x)=0$ si $x=0 \wedge x=2$. Para los signos de $F'(x)$

se tiene

x	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
F'	>0	<0	>0

$\nearrow$ Max $\searrow$ Min $\nearrow$

Entonces $x=0$ es punto de máximo Local y $x=2$ es punto de mínimo Local

(1.0)

Los valores extremos Locales serán $F(0)$ y $F(2)$

(0.5) $F(0)=\int_0^0 \frac{t^2-2t}{t^2+1}\,dt=0$

$F(2)=\int_0^2 \frac{t^2-2t}{t^2+1}\,dt=\int_0^2 \frac{t^2+1-2t-1}{t^2+1}\,dt=\int_0^2\left(1-\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$

(1.0) $\Rightarrow F(2)=\left[t-\ln(t^2+1)-\arctan t\right]_0^2=2-\ln 5-\arctan 2$

b) $\int_1^x y(t)\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)dt+\int_0^{y(x)}\operatorname{sen}(\pi t)\,dt=\frac{1}{2\pi}$. Se pide calcular $y(1)$ e $y'(1)$

Para $x=1$ se tiene $\underbrace{\int_1^1 y(t)\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)dt}_{0}+\int_0^{y(1)}\operatorname{sen}(\pi t)\,dt=\frac{1}{2\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{\cancel{\pi}}\cos\pi t\Big|_0^{y(1)}=\frac{1}{2\cancel{\pi}} \Rightarrow \underbrace{\cos(0)}_{1}-\cos(\pi y(1))=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\pi y(1))=\frac{1}{2}$

(1.0) $\Rightarrow \pi y(1)=\frac{\pi}{3} \Rightarrow y(1)=1/3$

(1.0) Para $y'(1)$, derivando y TFC: $y(x)\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)+\operatorname{sen}(\pi y(x))\cdot y'(x)=0$

y en $x=1$ queda $y(1)\cos\pi+\operatorname{sen}(\pi y(1))\,y'(1)=0$

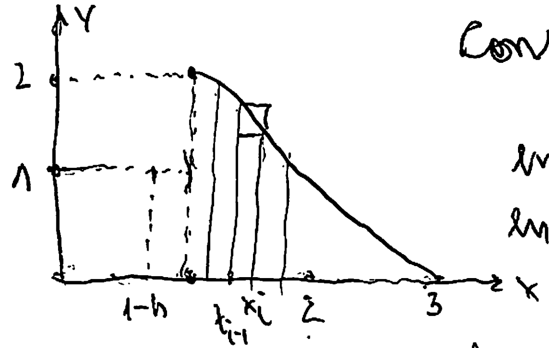
$\Rightarrow \frac{1}{3}(-1)+\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cdot y'(1)=0 \Rightarrow y'(1)=\frac{1/3}{\operatorname{sen}\pi/3}$

(1.0) $\Rightarrow y'(1)=\frac{1/3}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow y'(1)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Pauta Problema 2

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1)\\ g(x) & \text{si } x\in[1,3]\end{cases}\qquad g(x) \text{ decreciente},\ g(1)=2,\ g(3)=0$$

a) Calcular $S(f,P)$, $s(f,P)$ para $P=\{0,1-h,x_0,x_1,\dots,x_i,\dots x_n\}$ donde $x_i=1+ih$ y $h=\frac{2}{n}$



Consideraciones: $x_i=1+ih$, $x_0=1$, $x_n=1+nh$ $\Rightarrow x_n=1+n\frac{2}{n}=3$

en $[0,1-h]$ $m_i(f)=M_i(f)=1$

en $[1-h,\underbrace{x_0}_{1}]$ $m_i(f)=1$, $M_i(f)=2$

Como g es decreciente en $[1,3]$, lo es en cada $[x_{i-1},x_i]$

1.0 Así $m_i(f)=g(x_i) \wedge M_i(f)=g(x_{i-1})$

Entonces $s(f,P)=$ Suma Rectangulos inscritos $=(1-h)\cdot 1+h\cdot 1+\sum_{i=1}^{n}g(x_i)\cdot h$

y $S(f,P)=$ Suma de Rectangulos superiores $=(1-h)\cdot 1+h\cdot 2+\sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1})\cdot h$

1.5 $\Rightarrow s=1+\sum_{i=1}^{n}g(x_i)h$ y $S=h+1+\sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1})h$

b) Claramente $S(f,P)-s(f,P)=\left(h+1+\sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1})h\right)-\left(1+\sum_{i=1}^{n}g(x_i)\cdot h\right)$

0.5 $\Rightarrow S(f,P)-s(f,P)=h+\sum_{i=1}^{n}\left(g(x_{i-1})-g(x_i)\right)h$

Ahora $S(f,P)-s(f,P)=h+h\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(g(x_{i-1})-g(x_i)\right)}_{\text{Telescópica}}=h+h\left(g(\overset{1}{x_0})-g(\overset{3}{x_n})\right)$

1.0 $=h+h\left(g(1)-g(3)\right)=h+h(2-0)=3h$

Dado $\varepsilon>0$, la condición de Riemann exige $P\in\mathcal{P}[1,3]$ tq $S-s<\varepsilon$

0.5 En este caso $S-s=3h<\varepsilon \Rightarrow$ basta escoger $h=\frac{2}{n}<\varepsilon/3$

c) Para $g(x)=3-x$, $s(f,P)=1+h\sum_{i=1}^{n}g(x_i)=1+h\sum_{i=1}^{n}(3-x_i)=$

1.0 $=1+h\sum_{i=1}^{n}[3-(1+ih)]=1+h\sum_{i=1}^{n}(2-ih)=1+h\left[\sum_{i=1}^{n}2-h\sum_{i=1}^{n}i\right]=1+h\left[2n-h\frac{n(n+1)}{2}\right]$

0.5 $=1+h\left[2n-\frac{2}{\cancel{n}}\frac{\cancel{n}(n+1)}{\cancel{2}}\right]=1+\frac{2}{n}(n-1)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}s(f,P)=3$

Pauta Problema 3

a) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}$ ajustando a una suma Riemann

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1}{n} \quad \text{donde } \frac{b-a}{n}=\frac{1}{n} \Rightarrow b-a=1$$

$$x_i=\frac{i}{n}=a+\frac{b-a}{n}\,i \Rightarrow a=0,\ b=1 \text{ y } f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(0.5)

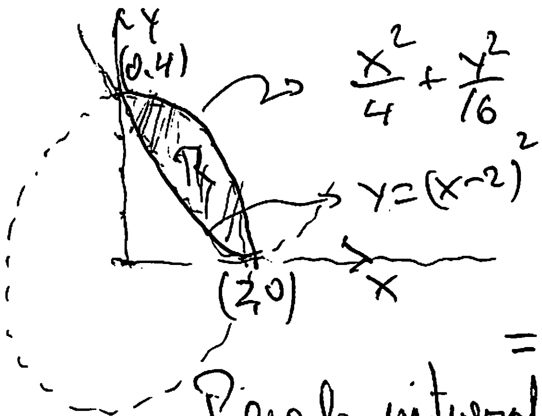
Así $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int_0^{\text{argsenh}\,1}\frac{\cosh u}{\cosh u}\,du=u\Big|_0^{\text{argsenh}(1)}=\underbrace{\text{argsenh}(1)}_{\ln(1+\sqrt{2})}$$

$x=\operatorname{senh} u$
$dx=\cosh u$

NO SE EXIGE

(1.0)

b)



$$\text{Area}=\int_0^2(y_{Elip}-y_{par})\,dx$$
$$=\int_0^2\left[\sqrt{4(4-x^2)}-(x-2)^2\right]dx$$
$$=2\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_0^2=2\int\sqrt{4-x^2}\,dx+\frac{8}{3}$$

Pero la integral $x=2\operatorname{sen}t$, $dx=2\cos t\,dt$

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=4\int_0^{\pi/2}\cos^2t\,dt=2\int_0^{\pi/2}(1+\cos2t)\,dt=\underbrace{2\left[t+\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t\right]_0^{\pi/2}}_{\pi}$$

(1.5)

Así $A=2\pi+8/3$

$$V_{ox}=\pi\int_0^2(y^2_{Elip}-y^2_{par})\,dx=\pi\int_0^2\left[4(4-x^2)-(x-2)^4\right]dx$$
$$=\pi\left[16x-\frac{4}{3}x^3-\frac{(x-2)^5}{5}\right]_0^2=32\pi\cdot\frac{13}{15}$$

(1.0)

c) $f(\pi)=2 \wedge \int_0^\pi(f(x)+f''(x))\operatorname{sen}x\,dx=5 \Rightarrow \int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}x\,dx+\int_0^\pi f''(x)\operatorname{sen}x\,dx=5$

y $$\int_0^\pi f''(x)\operatorname{sen}x\,dx=\cancel{f'(x)\operatorname{sen}x}\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\cos x\,dx=-\left[f(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}x\,dx\right]$$

$u=\operatorname{sen}x\to du=\cos x\,dx$
$dv=f''dx\to v=f'$

$u=\cos x\to du=-\operatorname{sen}x\,dx$
$dv=f'\to v=f$

$$=f(\pi)+f(0)-\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}x$$

(1.5)

Así $$\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}x\,dx+\int_0^\pi f''(x)\operatorname{sen}x\,dx=\cancel{\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}x\,dx}+f(\pi)+f(0)-\cancel{\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen}x\,dx}=5$$

(0.5)

$$\Rightarrow f(0)=5-f(\pi)=5-2=3 \Rightarrow \underline{f(0)=3}$$

Control 1 MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Fecha: 12 de Mayo de 2017

Problema 1. Calcule las siguientes integrales

a) (3.0 ptos.) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}$

b) (3.0 ptos.) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}$

Problema 2.

a) (3.0 ptos) Considere la integral

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Muestre, integrando por partes, que I_n satisface la recurrencia

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Calcule $I_2 = \displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

b) Considere la función $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$

i) (1.5 ptos.) Calcule las sumas inferior $s(f,P)$ y superior $S(f,P)$ si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición que sigue una progresión geométrica, es decir $x_k = q^k$, con $k = 0, \ldots, n$ considerando $q = \sqrt[n]{5}$.

ii) (1.5 ptos.) Calcule $S(f,P) - s(f,P)$. Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{5}-1) = \ln(5)$, pruebe que $\lim_{n\to\infty}(S(f,P) - s(f,P)) = 0$ y concluya qué f es integrable. Justifique adecuadamente sus respuestas.

Problema 3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz continua en $[a,b]$, es decir,

$$\forall x, y \in (a,b) \quad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y| \tag{1}$$

a) (2.0 ptos.) Demuestre que

$$\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \quad S(f,P) - s(f,P) \leq K|P|(b-a),$$

donde $\mathcal{P}_{[a,b]}$ es el conjunto de particiones del intervalo $[a,b]$ y $|P|$ es la norma de la partición P definida por

$$|P| = \text{máx}\,|x_i - x_{i-1}| \ : \ i = 1, \ldots, n.$$

b) (2.0 ptos.) Deduzca que toda función f que satisfaga la propiedad (1) es integrable en $[a,b]$.

c) (2.0 ptos.) Sea $f(x) = \sin(x)$ definida en $[a, b]$, recuerde que f es Lipschitz, es decir,

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

y sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$ que divide este intervalo en n partes iguales. Demuestre que

$$0 \leq S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P}) \leq \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Concluya que $f(x) = \sin x$ es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$.

Pauta Control ~~1~~ 2 MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Fecha: 12 de Mayo de 2017

Problema 1. Calcule las siguientes integrales

a) (3.0 ptos.) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}$

b) (3.0 ptos.) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}$

Solución:

a) Para resolver esta integral usamos fracciones parciales. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1+x^2)(1+x)} &= \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+x} = \frac{(Ax+B)(1+x)+C(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x)}\\ &= \frac{Ax+Ax^2+B+Bx+C+Cx^2}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{x^2(A+C)+x(A+B)+B+C}{(1+x^2)(1+x)}.\end{aligned}$$

(1.0 punto)

Luego, por igualdad de polinomios necesariamente debemos tener que

$$\begin{cases} A+C=0 & (1)\\ A+B=1 & (2)\\ B+C=0 & (3).\end{cases}$$

Restando (1) y (3), obtenemos $A-B=0$. Juntando esto con (2) obtenemos que $A=\frac{1}{2}$. Así, $B=\frac{1}{2}$ y $C=-\frac{1}{2}$.

(1.0 punto)

Por lo tanto, nuestra integral toma la forma

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{x+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)dx && (1)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2}dx - \int \frac{dx}{1+x}\right) && (2)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{2} + \arctan(x) - \ln(1+x)\right) + C && (3)\end{aligned}$$

(1.0 punto)

b) Como tenemos una función racional de seno y coseno, usamos el cambio de variable trigonométrico $t=\tan(\frac{x}{2})$. Con esto, sabemos que

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2}\\ \cos(x) &= \frac{1-t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

(1.0 punto)

Reemplazando lo anterior en nuestra integral, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \int \frac{4t}{(2+2t)(1+t^2)}dt = \int \frac{2t}{(1+t)(1+t^2)}dt.
\end{aligned}
$$

(1.0 punto)

Notemos que la integral anterior es igual a la integral calculada en a). Luego, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx &= \int \frac{2t}{(1+t)(1+t^2)}dt \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+t^2)}{2} + \arctan(t) - \ln(1+t)\right) + C \\
&= \left(\frac{\ln(1+t^2)}{2} + \arctan(t) - \ln(1+t)\right) + C \\
&= \frac{\ln(1+(\tan(\frac{x}{2}))^2)}{2} + \arctan(\tan(\frac{x}{2})) - \ln(1+\tan(\frac{x}{2})) + C \\
&= \frac{\ln(1+(\tan(\frac{x}{2}))^2)}{2} + \frac{x}{2} - \ln(1+\tan(\frac{x}{2})) + C
\end{aligned}
$$

(1.0 punto)

Problema 2.

a) (3.0 ptos) Considere la integral

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Muestre, integrando por partes, que I_n satisface la recurrencia

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

Calcule $I_2 = \displaystyle\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}$.

b) Considere la función $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$

i) (1.5 ptos.) Calcule las sumas inferior $s(f,P)$ y superior $S(f,P)$ si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición que sigue una progresión geométrica, es decir $x_k = q^k$, con $k = 0, \ldots, n$ considerando $q = \sqrt[n]{5}$.

ii) (1.5 ptos.) Calcule $S(f,P) - s(f,P)$. Sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{5} - 1) = \ln(5)$, pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} (S(f,P) - s(f,P)) = 0$ y concluya qué f es integrable. Justifique adecuadamente sus respuestas.

Solución:

a) Veamos la relación vía integración por partes, para ello consideremos

$$\begin{aligned} u &= (1+t^2)^{-n} = \frac{1}{(1+t^2)^n} & du &= -n(1+t^2)^{-n-1} \cdot 2t = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \\ dv &= dt & v &= t, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} &= \frac{t}{(1+t^2)^n} - \int \frac{-2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{(1+t^2) - 1}{(1+t^2)^{n+1}} \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n \int \frac{1}{(1+t^2)^n} - 2n \int \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}. \end{aligned}$$

(1.0 punto)

Por lo tanto se tiene que

$$2nI_{n+1} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1)I_n,$$

es decir,

$$I_{n+1} = \frac{t}{2n(1+t^2)^n} + \frac{(2n-1)}{2n} I_n,$$

o equivalentemente, reemplazando n por $(n-1)$

$$I_n = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1},$$

lo que completa la prueba.

(1.0 punto)

Por otra parte, tenemos que

$$I_1 = \int \frac{dt}{(1+t^2)} = \arctan t + c,$$

luego

$$I_2 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t + C.$$

(1.0 punto)

b) Consideremos la función $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$, la cual es decreciente en el intervalo.

i) Consideremos el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, luego de la monotonía de f se tiene que

$$M_k = \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = f(x_{k-1}) = \frac{1}{x_{k-1}} = \frac{1}{5^{\frac{k-1}{n}}},$$

$$m_i = \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = f(x_k) = \frac{1}{x_k} = \frac{1}{5^{\frac{k}{n}}}.$$

(0.5 puntos)

Por lo tanto

$$\begin{aligned} S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{\frac{k-1}{n}}}(5^{\frac{k}{n}} - 5^{\frac{k-1}{n}}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{\frac{k-1}{n}}} 5^{\frac{k-1}{n}}(5^{\frac{1}{n}} - 1) = \sum_{k=1}^{n}(5^{\frac{1}{n}} - 1) = n(5^{\frac{1}{n}} - 1). \end{aligned}$$

(0.5 puntos)

Además

$$\begin{aligned} s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{\frac{k}{n}}}(5^{\frac{k}{n}} - 5^{\frac{k-1}{n}}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^{\frac{k}{n}}} 5^{\frac{k}{n}}(1 - 5^{\frac{-1}{n}}) = \sum_{k=1}^{n}(1 - 5^{\frac{-1}{n}}) = n(1 - 5^{\frac{-1}{n}}). \end{aligned}$$

(0.5 puntos)

ii) Ahora, de lo anterior tenemos que

$$
\begin{aligned}
0 \leq S(f,P) - s(f,P) = n(5^{\frac{1}{n}} - 1) - n(1 - 5^{\frac{-1}{n}}) &= n\left[(5^{\frac{1}{n}} - 1) - (1 - 5^{\frac{-1}{n}})\right] \\
&= n\left[(5^{\frac{1}{n}} - 1) - \frac{(5^{\frac{1}{n}} - 1)}{5^{\frac{1}{n}}}\right] = n(5^{\frac{1}{n}} - 1)\frac{(5^{\frac{1}{n}} - 1)}{5^{\frac{1}{n}}}.
\end{aligned}
$$

(0.5 puntos)

Por lo tanto

$$
\lim_{n\to\infty} (S(f,P) - s(f,P)) = \lim_{n\to\infty} n(5^{\frac{1}{n}} - 1)\frac{(5^{\frac{1}{n}} - 1)}{5^{\frac{1}{n}}} = \ln 5 \lim_{n\to\infty} \frac{(5^{\frac{1}{n}} - 1)}{5^{\frac{1}{n}}} = 0.
$$

(0.5 puntos)

Por lo que se concluye que la función f es integrable ya sea por el criterio de Riemann o que las sumas superiores e inferiores convergen a un único valor.

(0.5 puntos)

Problema 3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz continua en $[a,b]$, es decir,

$$\forall x, y \in (a,b) \quad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y| \tag{4}$$

a) (2.0 ptos.) Demuestre que

$$\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \quad S(f,P) - s(f,P) \leq K|P|(b-a),$$

donde $\mathcal{P}_{[a,b]}$ es el conjunto de particiones del intervalo $[a,b]$ y $|P|$ es la norma de la partición P definida por

$$|P| = \text{máx}\,|x_i - x_{i-1}| \;:\; i = 1, \ldots, n.$$

b) (2.0 ptos.) Deduzca que toda función f que satisfaga la propiedad (4) es integrable en $[a,b]$.

c) (2.0 ptos.) Sea $f(x) = \sin(x)$ definida en $[a,b]$, recuerde que f es Lipschitz, es decir,

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

y sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$ que divide este intervalo en n partes iguales. Demuestre que

$$0 \leq S(f,\mathcal{P}) - I(f,\mathcal{P}) \leq \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Concluya que $f(x) = \sin x$ es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$.

Solución:

a) Sea P una partición del intervalo $[a,b]$ de la forma $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$. Calculemos las sumas superiores e inferiores de f bajo la partición P denotadas por $S(f,P)$ y $s(f,P)$, respectivamente, es decir,

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}),$$
$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}),$$

donde $M_i(f) = \sup\{f(x) : \; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_i(f) = \text{ínf}\{f(x) : \; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

(0.5 puntos)

Como f es una función Lipschitz, entonces necesariamente es continua. Así, por Teorema de Weiertrass tenemos que f alcanza su mínimo y máximo en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Es decir, existen $x_i^1, x_i^2 \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que

$$M_i(f) = f(x_i^1) \quad m_i(f) = f(x_i^2).$$

(0.5 puntos)

Luego, reemplazando en las sumas superiores e inferiores obtenemos

$$\begin{aligned}
S(f,P)-s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i-x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^1)(x_i-x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^2)(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^1) - f(x_i^2)(x_i-x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} K|x_i^1 - x_i^2|(x_i-x_{i-1}), \qquad (5)
\end{aligned}$$

esta última desigualdad se obtiene de (4).

(0.5 puntos)

Como $|P| = \max |x_i - x_{i-1}| \; : \; i = 1, \ldots, n$, se tiene que $|x_i^1 - x_i^2| \leq |x_i - x_{i-1}| \leq |P|$. Por tanto, reemplazando en (5), se tiene que

$$\begin{aligned}
S(f,P)-s(f,P) &\leq \sum_{i=1}^{n} K|P|(x_i-x_{i-1}) \\
&= K|P| \sum_{i=1}^{n} (x_i-x_{i-1}) \\
&= K|P|(b-a).
\end{aligned}$$

(0.5 puntos)

b) Sabemos que para que f sea integrable debe satisfacer la condición de Riemann, es decir,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in P_{[a,b]} \text{ tal que } S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) \leq \varepsilon. \qquad (6)$$

(0.5 puntos)

De la parte anterior tenemos que

$$\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \quad S(f,P)-s(f,P) \leq K|P|(b-a).$$

(0.5 puntos)

Luego, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar una partición P_ε de $[a,b]$ tal que

$$|P_\varepsilon| \leq \frac{\varepsilon}{K(b-a)}.$$

(0.5 puntos)

Luego, de a), hemos encontrado una partición P_ε de $[a,b]$ tal que

$$\begin{aligned}
S(f,P)-s(f,P) &\leq K|P|(b-a) \\
&\leq K\frac{\varepsilon}{K(b-a)}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

(0.5 puntos)

Notemos que de lo anterior podemos notar que como la partición P es arbitraria, entonces se tiene que $|P|$ es tan pequeño como queramos y por tanto se tiene que

$$S(f,P) - s(f,P) \leq \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0,$$

es decir, existe un único valor entre ambas sumas para toda partición, por tanto f es integrable.

c) Como $f(x) = \sin(x)$ es Lipschitz (con $K = 1$), ella satisface el resultado de la parte a), es decir,

$$\forall P \in \mathcal{P}_{[a,b]} \quad S(f,P) - s(f,P) \leq |P|(b-a).$$

(0.5 puntos)

Tomemos P una partición de $[a,b]$ que divide el intervalo en n partes iguales, es decir, los elementos de la partición son de la forma

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n},$$

con $i = 0, \ldots, n$. Entonces obtenemos que cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ satisface que

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

(0.5 puntos)

Luego, $|P| = \dfrac{b-a}{n}$. Así, obtenemos que

$$S(f,P) - s(f,P) \leq |P|(b-a) = \frac{(b-a)}{n}(b-a) = \frac{(b-a)^2}{n}.$$

(0.5 puntos)

luego tomando límite de $n \to \infty$ se concluye que f es integrable.

(0.5 puntos)

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cáculo diferencial e integral 2017-2

Control 2

P1) Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+y^2=5$ y la parábola de ecuación $y=2(x-1)^2$ (región bajo la circunferencia y sobre la parábola).

a) (2.0 ptos.) Determine el área de la región $\mathcal{R}$.

b) (2.0 ptos.) Determine el volumen del sólido generado por la rotación de $\mathcal{R}$ alrededor del eje OX.

c) (2.0 ptos.) Determine el volumen del sólido generado por la rotación de $\mathcal{R}$ alrededor del eje OY.

P2) Sea $\mathcal{P}_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ la partición del intervalo $[1,e]$ definida por $x_i = e^{i/n},\ i = 0,1,\ldots,n$.

a) (3.0 ptos.) Dada $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ creciente, pruebe que se tiene:

$$s(f,\mathcal{P}_n)=\frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}}\sum_{i=1}^{n} f\left(e^{(i-1)/n}\right)e^{i/n};\quad S(f,\mathcal{P}_n)=\frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}}\sum_{i=1}^{n} f\left(e^{i/n}\right)e^{i/n},$$

donde $s(f,\mathcal{P})$ denota la suma inferior de f asociada a la partición $\mathcal{P}$ y $S(f,\mathcal{P})$ la suma superior de f asociada a la partición $\mathcal{P}$.

b) (3.0 ptos.) En el caso particular de $f(x)=\sqrt{x}$, calcule $s(f,\mathcal{P}_n)$, $S(f,\mathcal{P}_n)$ y pruebe que:

$$\lim_{n\to\infty} s(f,\mathcal{P}_n)=\lim_{n\to\infty} S(f,\mathcal{P}_n)=\frac{2}{3}\left(e^{3/2}-1\right)$$

Indicación: Le pueden ser útiles los siguientes resultados:

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = q\cdot\frac{q^n-1}{q-1},\quad q\neq 1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{e^{bx}-1}=\frac{a}{b}$$

P3)

a) (2.0 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{6\sqrt{3}n}{3n^2+i^2}$ expresándolo como una suma de Riemann.

b) (2.0 ptos.) Sean $f,g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ funciones continuas, tales que $g(x)>0, \forall x\in[0,\infty)$ y $f(0)=0$.
Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)dx = 0,\quad (n\in\mathbb{N}\setminus\{0\})$$

c) (2.0 ptos.) Demuestre que la función F definida por $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sin(x)}\arcsin(t)dt$ tiene un máximo local en $\frac{\pi}{2}$ y un mínimo local en 0, calcúlelos.

Formulario:

$$A=\int_a^b h(x)dx,\quad V=\pi\int_a^b h^2(x)dx,\quad V=2\pi\int_a^b xh(x)dx,\quad V=\int_a^b A(x)dx$$

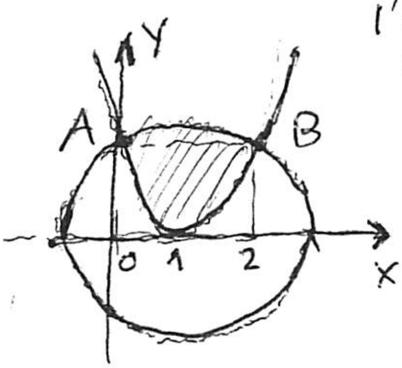
Tiempo: 3 horas.

Pauta Problema 1

i) Cirunferencia $(x-1)^2+y^2=5$ Centro $C(1,0)$ radio $=\sqrt{5}$

Parábola de eje vertical $y=2(x-1)^2$

Para A, B puntos comunes se tiene.



$$(x-1)^2 = 5-y^2 = \frac{y}{2} \Rightarrow 2y^2+y-10=0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{4} \begin{cases} \to 2 \\ \to -5/2<0 \text{ se descarta} \end{cases}$$

(0.5)

Sigue que $(x-1)^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A(0,2) \\ B(2,2) \end{matrix}$

Entonces $A(R)=\int_0^2 (y_{\odot} - y_{par})\,dx = \int_0^2\left[\sqrt{5-(x-1)^2} - 2(x-1)^2\right]dx$

Para $2\int_0^2 (x-1)^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3\Big|_0^2 = \frac{2}{3}[1-(-1)] = \frac{4}{3}$

Para $\int_0^2\sqrt{5-(x-1)^2}\,dx$ sustitucion $(x-1)=\sqrt{5}\,\text{sen}\,t$, $dx=\sqrt{5}\cos t\,dt$

$$\Rightarrow \int_0^2 \sqrt{5-(x-1)^2}\,dx = \int_{-\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}}^{\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}}\sqrt{5-5\,\text{sen}^2 t}\,\sqrt{5}\cos t\,dt = 5\int_{-\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}}^{\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{5}{2}\int_{-\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}}^{\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{5}{2}\left[t+\frac{1}{2}\underbrace{\text{sen}\,2t}_{\text{sen}\,t\cos t}\right]_{-\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}}^{\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}}$$

(1.0)

$$= 5\,\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5} + \frac{5}{2}\left[\text{sen}\,t\sqrt{1-\text{sen}^2 t}\right]_{-\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}}^{\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}}$$

$$= 5\,\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5} + \frac{5}{2}\left[2\,\frac{1}{\sqrt5}\sqrt{1-\frac{1}{5}}\right] = 5\,\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5} + \overbrace{\frac{\cancel{5}}{2}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}}^{2}$$

(0.5) Sigue que $A(R) = 5\,\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}+2-\frac{4}{3} = 5\,\text{arcsen}\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{3}$

ii) Volumen de rotacion de R entorno al eje Ox

(0.5) $V_{ox} = \pi\int_0^2 (y_{\odot}^2 - f_{par}^2)\,dx = \pi\int_0^2\left[5-(x-1)^2 - 4(x-1)^4\right]dx$

$$\Rightarrow V_{ox} = \pi\left[5x - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{4}{5}(x-1)^5\right]_0^2 =$$

(1.5)

$$= \pi\left[10 - \frac{1}{3} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right] = \pi\left[10 - \frac{2}{3} - \frac{8}{5}\right] = \frac{116}{15}\pi$$

iii) Volumen de Revolución de R en torno al eje OY

$$V_{oy} = 2\pi\int_0^2 x\left[f_{①} - f_{P2r}\right]dx = 2\pi\int_0^2 x\left[\sqrt{5-(x-1)^2} - 2(x-1)^2\right]dx$$

$$= 2\pi\left[\int_0^2 x\sqrt{5-(x-1)^2}\,dx - 2\int_0^2 x(x-1)^2\,dx\right]$$

(0.5) Para $\int_0^2 x(x-1)^2\,dx = \int_0^2 \left[x^3 - 2x^2 + x\right]dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \frac{2}{3}$

Para $I = \int_0^2 x\sqrt{5-(x-1)^2}\,dx$ con $x-1 = t$, $dx = dt$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1}(t+1)\sqrt{5-t^2}\,dt = \underbrace{\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt}_{\to 0} + \underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{5-t^2}\,dt}_{= \int_{-\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}} \sqrt{5-(x-1)^2}\,dx}$$

nula por ser integral de f impar entre límites simétricos c/r el origen

Calculado en (i)

(1.0)

Sigue que $V_{oy} = 2\pi\left[5\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2 - 2\cdot\frac{2}{3}\right]$

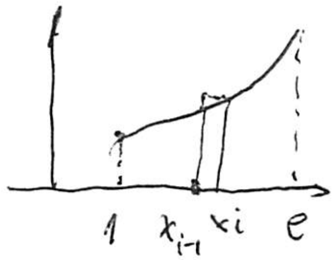
(0.5)

$$\Rightarrow V_{oy} = 2\pi\left[5\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3}\right]$$

Pauta Problema 2

a) $P_n=\{x_0,\dots,x_n\}$ partición de $[1,e]$ con $x_i=e^{i/n}$

y f creciente: $\quad x_i=e^{i/n}$; $x_{i-1}=e^{i-1/n}$



Entonces $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = e^{i/n}-e^{\frac{i-1}{n}}$

$$\Rightarrow x_i-x_{i-1} = e^{i/n}(1-e^{-1/n}) = e^{i/n}\,\frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}}$$

(1.0)

(1.0) Como f es creciente: $s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} \overbrace{f(x_{i-1})}^{m_i(f)}\Delta x_i$ y $S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} \overbrace{f(x_i)}^{M_i(f)}\Delta x_i$

es decir $\quad s(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(e^{\frac{i-1}{n}})\, e^{i/n}\,\frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}} = \frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}}\sum_{i=1}^{n} f(e^{\frac{i-1}{n}})\, e^{i/n}$

(1.0) $\quad S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(e^{i/n})\, e^{i/n}\,\frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}} = \frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}}\sum_{i=1}^{n} f(e^{i/n})\, e^{i/n}$

b) Para el caso de $f(x)=\sqrt{x}$, creciente en $[1,e]$ se tiene.

(0.5) $\quad f(x_{i-1})=\sqrt{x_{i-1}}=\sqrt{e^{\frac{i-1}{n}}}=e^{\frac{i-1}{2n}} \;\wedge\; f(x_i)=e^{\frac{i}{2n}}$

Entonces $\quad S(f,P)=\frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{e^{\frac{i}{2n}}\cdot e^{i/n}}_{e^{3i/2n}} = \frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{3}{2n}}\right)^i}_{\text{Suma Geométrica}}$

$$\Rightarrow S(f,P) = \frac{e^{1/n}-1}{e^{1/n}}\cdot e^{\frac{3}{2n}}\,\frac{1-e^{3/2}}{1-e^{3/2n}} = \frac{e^{1/n}-1}{-(e^{3/2n}-1)}\,\frac{e^{3/2n}}{e^{1/n}}\,(1-e^{3/2})$$

(2.0) Así $\quad \lim_{n\to\infty} S(f,P) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{e^{1/n}-1}{e^{3/2n}-1}}_{\to\frac{1}{3/2}}\ \underbrace{\frac{e^{3/2n}}{e^{1/n}}}_{\to\frac{1}{1}}\,[e^{3/2}-1] = \frac{2}{3}\,e^{3/2}-1$

Análogamente, aplicando las indicaciones $s(f,P)\to\frac{2}{3}(e^{3/2}-1)$

(0.5) Entonces $\quad \lim_{n\to\infty} S(f,P) = \lim_{n\to\infty} s(f,P) = \frac{2}{3}(e^{3/2}-1)$

Pauta Problema 3

i) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{6\sqrt{3}\,n}{3n^2+i^2}$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{6\sqrt{3}\,n/n^2}{3n^2+i^2/n^2}=6\sqrt{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{1/n}{3+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$ de donde, para una partición equiespaciada $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$, $x_i=i/n$

(1.0) $\Rightarrow \frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}\Rightarrow b-a=1$ y $x_i=a+\frac{b-a}{n}i=a+\frac{i}{n}=i/n$

$\Rightarrow a=0\wedge b=1$ en $f(x)=\frac{1}{3+x^2}$

Así $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{6\sqrt{3}\,n}{3n^2+i^2}=6\sqrt{3}\int_0^1\frac{dx}{3+x^2}=6\cancel{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_0^1$

(1.0) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{6\sqrt{3}\,n}{3n^2+i^2}=6\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=6\cdot\frac{\pi}{6}=\pi$

ii) $f,g:[0,\infty)$ continuas, $g(x)>0\ \forall x\in[0,\infty)$, $f(0)=0$

Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)\,dx=0$ $(n\in\mathbb{N}\setminus\{0\})$

Por Teorema del Valor medio para integrales, como $g(x)>0$ en $[0,1]$, es decir, de signo constante y f continua en $[0,1]$,

(0.5) $\exists\,\xi\in(0,1)$ tal que $\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)\,dx=f\left(\frac{\xi}{n}\right)\int_0^1 g(x)\,dx$

además, $g(x)$ es continua y por lo tanto integrable en $[0,1]$,

(0.5) entonces $\int_0^1 g(x)\,dx$ existe y es acotada

además para $\xi\in(0,1)$, $0<\frac{\xi}{n}<\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{\xi}{n}\to 0$ si $n\to\infty$

Como f es continua, $f\left(\frac{\xi}{n}\right)\to f(0)=0$ por hipótesis

(1.0) Sigue que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)g(x)\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{\xi}{n}\right)\int_0^1 g(x)\,dx=0$

iii) Demostrar que $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t \, dt$ tiene un máximo local en $\pi/2$ y un mínimo local en 0. Calcularlos

$$F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t \, dt \Rightarrow F'(x) = \underbrace{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)}_{x} \underbrace{(\operatorname{sen} x)'}_{\cos x}$$

$\Rightarrow F'(x) = x \cos x$. Así $F'(x) = 0$ si $\begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases}$

(1.0) es decir si $x = 0$ y $x = 2k\pi \pm \pi/2$

Para $x = 0$, $F''(x) = \cos x - x \operatorname{sen} x \Rightarrow F''(0) = \pi/2 > 0$, es decir, F convexa

(0.3) $\cancel{x} = 0$ es punto de mínimo Local y $F(0) = \int_0^0 \operatorname{arcsen} t \, dt = 0$

Para $x = \pi/2$ $\quad F''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow F$ cóncava

y $x = \pi/2$ es punto de máximo Local y

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\operatorname{sen}(\pi/2)} \operatorname{arcsen} t \, dt = \underbrace{\int_0^1 \operatorname{arcsen} t \, dt}_{\text{Partes}}$$

$u = \operatorname{arcsen} t$

$du = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$

$dv = dt$

$v = t$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = t \operatorname{arcsen} t \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

(0.7) $$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi/2 + \sqrt{1-t^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral 2017-3

Control 2

P1) Considere la función $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2\arctan(x^2)$.

a) Determine el dominio de f, sus ceros, signos, paridad, el conjunto donde es continua y donde es derivable, determine finalmente, justificando, el máximo $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que $f \in \mathcal{C}^k(\mathrm{Dom}(f))$.

b) Calcule f', determine puntos críticos, analice intervalos de crecimiento.

c) Calcule f'', analice intervalos de concavidad-convexidad y caracterice los puntos críticos obtenidos en la parte anterior.

d) Bosqueje un gráfico aproximado de f utilizando la información obtenida en los puntos anteriores.

P2)

a) (3.0 ptos.) En una fábrica se requiere construir un estánque para residuos líquidos a altas temperaturas. Para ello, se posee una lámina cuadrada de un material particularmente resistente al calor de lado ℓ, esta debe cortarse apropiadamente para dar lugar a un paralelepípedo recto.
Se le pide a usted, como experto, determinar cuanto debe cortarse en cada esquina de la lámina de modo tal de poder construir el estánque maximizando el volumen disponible para depositar los residuos. Para ello, analice completamente la función $V(x)$ asociada al volumen obtenido al cortar un cuadrado de lado x en cada esquina de la lámina (de modo de poder construir el recipiente deseado).

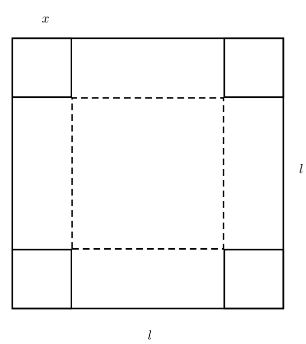


Figura 1: Lámina y cortes necesarios

b) (1.5 ptos.) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1([0,1])$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) > 0$ $\forall x \in [0,1]$. Pruebe que existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que:

$$mx \le f(x) \le Mx, \ \forall x \in [0,1]$$

c) (1.5 ptos.) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x}$$

P3)

a) (3.0 ptos.) Definamos, para $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$. Pruebe que para $n \ge 1$:

$$(1+2n)I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}.$$

b) (3.0 ptos.) Determine

$$\int \frac{1}{3 - 5\sin x}dx$$

Tiempo: 3 horas.

Pauta P1: Control N°2

Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\arctan(x^2)$.

(a) $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Ceros: $f(x) = 0 \iff 2\arctan(x^2) = 0$

$\iff \arctan(x^2) = 0$

$\iff x^2 = 0 \iff x = 0 \in \mathrm{Dom}(f)$.

Así, f tiene un único cero en $x=0$.

Signo: Sabemos que para $g(x) = \arctan(x)$ el signo de g es el signo de x. Así, en nuestro caso, como $x^2 > 0$, obtenemos que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Paridad: Como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, dado $x \in \mathrm{Dom}(f)$, entonces $-x \in \mathrm{Dom}(f)$

$f(-x) = 2\arctan((-x)^2) = 2\arctan(x^2) = f(x)$.

Por tanto, f es par. (De aquí en adelante se puede hacer el análisis sólo para $x>0$)

Continuidad: Sabemos que la función $h(x) = \tan(x)$ es continua en su $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Esto nos implica que la función $f(x) = 2\arctan(x^2)$ es continua en su dominio.

Derivable: Sabemos que si consideramos

$h(x) = \tan(x)$, ella es derivable con derivada

$$h'(x) = \sec^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Con lo cual su función inversa es derivable y

$$[h^{-1}(x)]' = [\arctan(x)]' = \frac{1}{1+x^2}$$

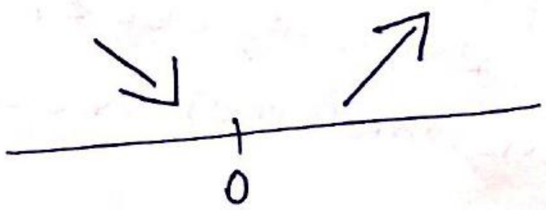
Por tanto, $f(x) = 2\arctan(x^2)$ es derivable en todo su dominio. Y

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{1+x^4} = \frac{4x}{1+x^4}.$$

Notemos que $f'(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, con $q(x) \neq 0$, para todo $x \in Dom(f)$. Luego, f' es derivable. Repitiendo este proceso, podemos ver que $f \in C^{\infty}(Dom f)$.

(b) Ya tenemos que $f'(x) = \frac{4x}{1+x^4}$. Así,

$$f'(x) = 0 \iff 4x = 0 \iff x = 0. \text{ (punto crítico)}$$



(crecimiento)

(c) $f''(x) = \dfrac{4(1+x^4) - 4x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \dfrac{4+4x^4-16x^4}{(1+x^4)^2}$

$$= \frac{4-12x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{4(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}.$$

Luego,

$$f''(x) = 0 \iff 1-3x^4 = 0$$
$$\iff (1-\sqrt{3}x^2)(1+\sqrt{3}x^2) = 0$$
$$\iff (1-\sqrt[4]{3}x)(1+\sqrt[4]{3}x)\underbrace{(1+\sqrt{3}x^2)}_{\neq 0} = 0$$

$$\iff \boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}}$$

Para analizar el signo, basta analizar el signo de $(1-\sqrt{3}x^2)$. Como es una función cuadrática con el término que acompaña a x^2 negativo, obtenemos que

$1-\sqrt{3}x^2$ — positiva: antes de su 1er cero / después de su 2° cero; negativa: entre sus ceros.

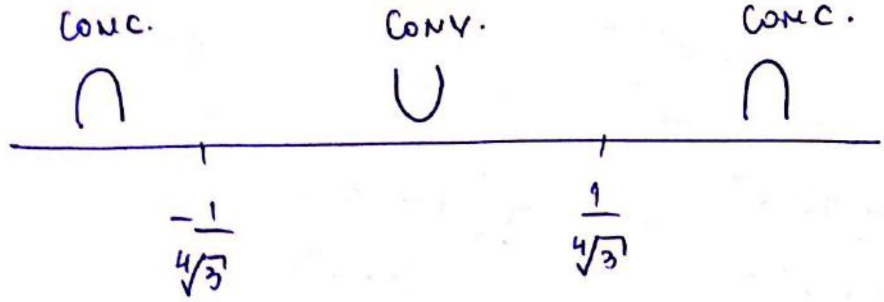
Por tanto,

$f''(x) > 0$, si $x \in \left]-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right[$

$f''(x) < 0$, si $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty\right[$.

$\longrightarrow$

EN RESUMEN



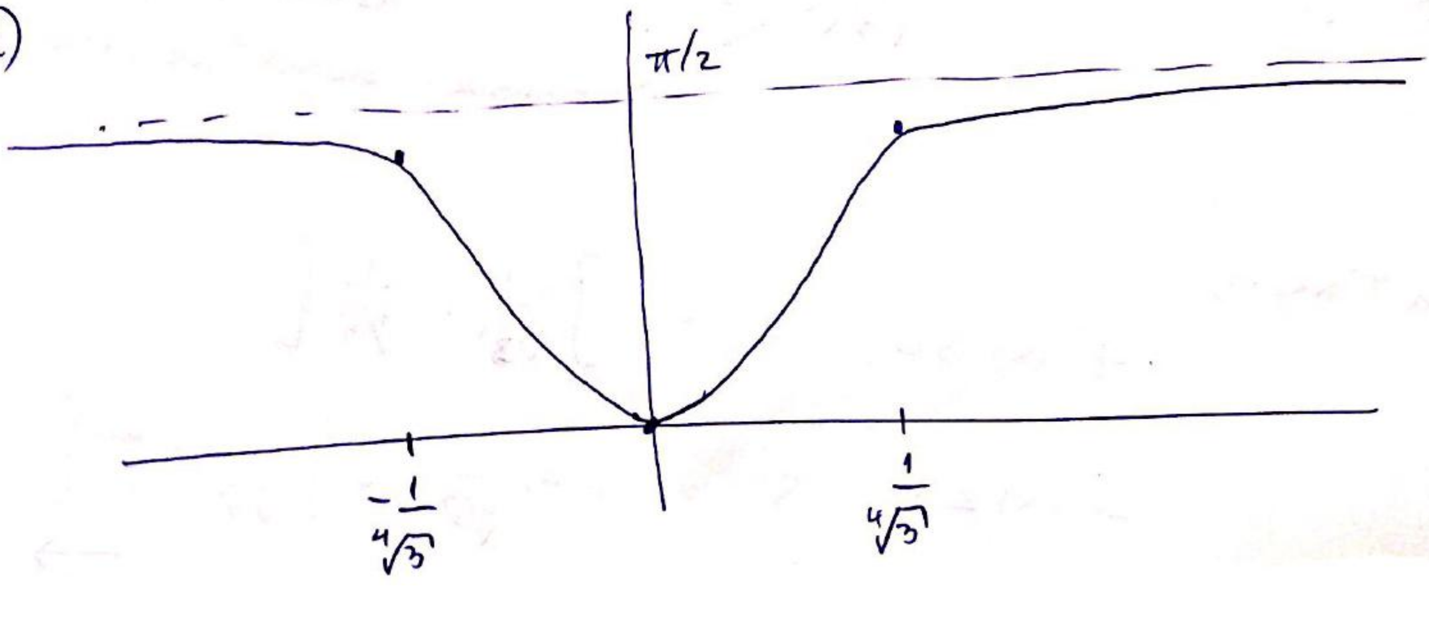
Ahora, analizamos la naturaleza del punto crítico encontrado en (b). ($x_0=0$). Entonces

$$f''(x)\Big|_{x_0=0} = \frac{4(1-3\cdot 0)}{(1+0)^2} = 4. > 0.$$

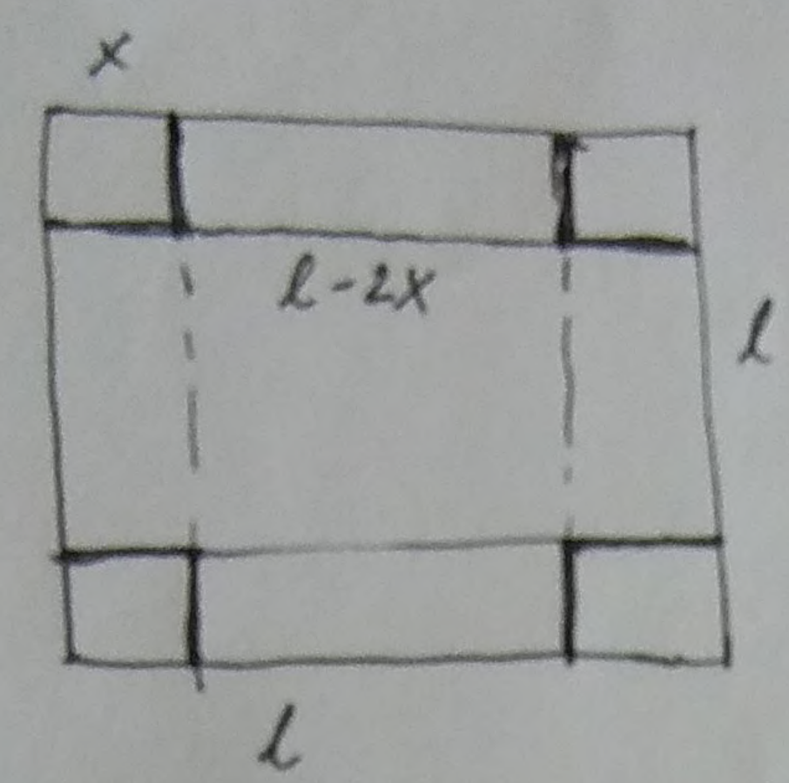
Por lo tanto, en $x_0=0$ f alcanza su mínimo.

→ obs: Como $f \geq 0$, entonces $x_0=0$ es un mínimo global de f.

(d)



P2a)



Volumen es dado por
$$V(x) = x\cdot(l-2x)^2$$
1 pto

$$V'(x) = (l-2x)^2 + 2x(l-2x)(-2)$$
$$= (l-2x)[l-2x-4x]$$
$$= (l-2x)(l-6x).$$

De este modo encontramos dos puntos críticos

$x=\frac{l}{2}$ y $x = l/6$.

1.pto

Por oro lado $V'(x) = (l-2x)(l-6x) = l^2 - 8xl + 12x^2$, luego $V''(x) = 24x - 8l$. Evaluando $V''(x)$ en los puntos críticos, obtenemos

$$V''(l/2) = 24\frac{l}{2} - 8l = (12-8)l = 4l > 0$$

$$V''(l/6) = 24 l/6 - 8l = (4l - 8l) = -4l < 0$$

De este modo en $x = l/2$ obtemos el volumen mínimo que corresponde a la solución trivial $V\equiv 0$. Por otro lado $x = l/6$ corresponde a un punto de maximo, donde

$$V(l/6) = (l - l/3)^2\, l/6 = \frac{4}{9}\frac{l^3}{6} = \frac{2}{27}l^3.$$

1.pto

P2 b) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f\in C^1([0,1])$, $f(0)=0$ y $f'(x)>0 \;\forall x\in[0,1]$

Entonces $\exists\, m, M$ tq: $mx \leq f(x) \leq Mx$.

Sol. La idea es usar TVM, dado $x\in[0,1]$ (arbit.), apliquémoslo en $[0,x]$:

$\Rightarrow \exists\, \xi_x \in (0,x)$: $\dfrac{f(x)-\overset{0}{f(0)}}{x-0} = f'(\xi_x) \iff f(x) = f'(\xi_x)\,x$. $(*)$ (+0,5) TVM apropiado.

Ahora, como $f\in C^1([0,1]) \Rightarrow f'$ es cont. en $[0,1] \Rightarrow$ alcanza máx y mín en $[0,1]$

ie. $\exists\, m, M$ tq $m \leq f'(y) \leq M \quad \forall y\in[0,1]$ (+0,5) cotas p/ $f'(y)$

Así, usando esto en $(*)$ (notar que ξ_x dep. de x, luego es nec. la cota de f' $\forall y\in[0,1]$)

$$m\cdot x \leq f(x) = f'(\xi_x)\cdot x \leq M\cdot x$$ (+0,5) Conclusión.

que es lo pedido.

Obs. Como $f'(x)>0\;\forall x$, necesariamente $m>0$. (no se pedía).

Scanned by CamScanner

Pauta P3C.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)+\cos(x)} \overset{x=\pi}{=} \frac{1-1}{1+0+(-1)} = \frac{0}{0}.$$

Usamos regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+\cos(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)+\cos(x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} - \operatorname{sen}(x)}{2\operatorname{sen}(x)\cos x - \operatorname{sen}(x)} = \frac{0}{0}.$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{4} - \cos(x)}{2\cos^2(x) - 2\operatorname{sen}^2(x) - \cos(x)} = \frac{-\frac{1}{4}+1}{-2+1} = \frac{1}{4}$$

P3 a) $I_n := \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx$. Pdq $(1+2n)I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}$

Como siempre, hay que integrar por partes:

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \underset{f}{x^n}\ \underset{g'}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}}\,dx \qquad \text{Como } \left.\begin{array}{l} f = x^n \Rightarrow f' = nx^{n-1} \\ g' = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow g = 2\sqrt{1+x} \end{array}\right\} (+1.0)$$

Luego: $I_n = f\cdot g - \int f'\cdot g = 2\sqrt{1+x}\,x^n - \int nx^{n-1}\cdot 2\sqrt{1+x}\,dx$

$$= \underbrace{2x^n\sqrt{1+x}}_{\text{justo lo pedido}} - 2n\underbrace{\int x^{n-1}\sqrt{1+x}\,dx}_{\text{algo no calza... hay que "ajustarlo"}} \quad (+0.5)$$

notar que $x^{n-1}\sqrt{1+x} = x^{n-1}\sqrt{1+x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = x^{n-1}\frac{(1+x)}{\sqrt{1+x}} = \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x}} + \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$

$\therefore \int x^{n-1}\sqrt{1+x}\,dx = \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x}} + \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{1+x}} + \int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1+x}}$ $(+0.5)$

y luego: $I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2n\underbrace{\int\frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x}}\,dx}_{I_{n-1}} - 2n\underbrace{\int\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\,dx}_{I_n}$

$$I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1} - 2nI_n$$

$\therefore\ (1+2n)I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}$ lo pedido $(+1,0)$

Scanned by CamScanner

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3-5\operatorname{sen} x}\,dx$. Claramente se debe usar el cv $u = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

en tal caso: $\dfrac{2}{1+u^2}\,du = dx$ y $\operatorname{sen} x = \dfrac{2u}{1+u^2}$, luego:

$$\int \frac{1}{3-5\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}du}{3-5\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)} = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{\frac{3+3u^2-10u}{1+u^2}}\,du = \int \frac{2}{3u^2-10u+3}\,du$$

(+1,0 hasta acá)

Para obtener la primitiva se debe descomponer en fracciones parciales. para ello, primero factoricemos el polin. $3u^2-10u+3$:

Saquemos sus raíces: $u_{1,2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-4\cdot 3\cdot 3}}{6} = \dfrac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \dfrac{10\pm\sqrt{64}}{6}$

$= \dfrac{10 \pm 8}{6}$ $\quad u_1 = 3$, $\quad u_2 = \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ 3u^2-10u+3 = 3\left(u-\frac{1}{3}\right)(u-3) = (3u-1)(u-3)$. ← (+0,5)

Así: $\displaystyle\int \frac{2\,du}{3u^2-10u+3} = 2\int \frac{du}{(3u-1)(u-3)} = 2\left[\int\left(\frac{A}{3u-1}+\frac{B}{u-3}\right)du\right]$

$\displaystyle = 2\left[\int \frac{Au-3A+3Bu-B}{(3u-1)(u-3)}\,du\right] = 2\int \frac{du}{(3u-1)(u-3)}$

$\therefore\ A+3B = 0 \wedge -3A-B = 1 \Rightarrow B = -3A-1$

$\Rightarrow A + 3(-3A-1) = 0$

$-8A = 3 \Rightarrow \boxed{A = -3/8 \quad B = \frac{9}{8}-1 = \frac{1}{8}}$ (+0,5 A y B)

y así: $\displaystyle\int \frac{2}{3u^2-10u+3}\,du = 2\left[-\frac{3}{8}\int\frac{du}{3u-1} + \frac{1}{8}\int\frac{du}{u-3}\right]$

$\displaystyle = 2\left[-\frac{1}{8}\int\frac{du}{u-\frac{1}{3}} + \frac{1}{8}\ln|u-3|\right]+C = 2\left[-\frac{1}{8}\ln\left|u-\frac{1}{3}\right| + \frac{1}{8}\ln|u-3|\right]+C$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-3}{u-\frac{1}{3}}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-3}{tg\frac{x}{2}-\frac{1}{3}}\right| + C.$ (+1,0) calculos finales.

MA1002: Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Raúl Uribe, Matías Godoy, Cristián Reyes.

Control 2

1. Calcule las siguientes integrales o primitivas

   a) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4+3\cos(x)}dx$

   c) $\displaystyle\int (\arcsin(x))^2 dx$

2. *a)* Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Suponga que existen familias de particiones de $[0,1]$, $\{P_n\}_{n\in N}$, $\{Q_n\}_{n\in N}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n)-s(f,Q_n)=0$. Pruebe que f es Riemann-Integrable.

   b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable, con f'' continua. Sean además a y b fijos con $a<b$ y $f(a)=f(b)=0$.

      1) Pruebe que $\displaystyle\int_a^b f(x)f''(x)dx \leq 0$.

      2) Determine las funciones f para las cuales, bajo las hipótesis anteriores, se tiene que: $\displaystyle\int_a^b f(x)f''(x)dx = 0$

3. *a)* Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^3}+\sqrt[n]{e^4}+\cdots+\sqrt[n]{e^{n-1}}+\sqrt[n]{e^n}}{n}$$

   b) Muestre que la función $F(x)=\displaystyle\int_{x^3}^{x^2}\frac{t^6}{1+t^4}dt$ tiene un punto crítico en $x=0$. Decida si es mínimo o máximo.

   c) Suponga que f es integrable en $[a,b]$. Demuestra que existe un número ξ en $[a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^{\xi} f(x)dx = \int_{\xi}^b f(x)dx$.

MA1002: Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Raúl Uribe, Matías Godoy, Cristián Reyes.

Control 2

1. Calcule las siguientes integrales o primitivas

   a) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$

   Solución:

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = \int \frac{3x+2}{\sqrt{9-(x+2)^2}}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4-4+\frac{4}{3}}{\sqrt{9-(x+2)^2}}dx$$

$$= -3\int \frac{-2x-4}{2\sqrt{9-(x+2)^2}}dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{9-(x+2)^2}}dx =$$

$$= -3\sqrt{9-(x+2)^2} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x+2}{3})^2}}$$

$$= -3\sqrt{9-(x+2)^2} - 4\arcsin(\frac{x+2}{3}) + c \blacksquare$$

   b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4+3\cos(x)}dx$

   Solución: Encontraré primero una primitiva y luego evaluaré.

   Sea $t = \tan(\frac{x}{2})$, entonces $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{1}{4+3\cos(x)}dx = \int \frac{1}{4+3(\frac{1-t^2}{1+t^2})} \times \frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{4(1+t^2)+3(1-t^2)}dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{7+t^2}dt = \frac{2}{7}\int \frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{7}})^2}dt = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{t}{\sqrt{7}}) = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{\tan(\frac{t}{2})}{\sqrt{7}})$$

   Luego $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4+3\cos(x)}dx = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{\tan(\frac{\pi}{6})}{\sqrt{7}}) = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{7}}) = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{21}}) \blacksquare$

   c) $\displaystyle\int (\arcsin(x))^2 dx$

   Solución:
   Integrando por partes considerando $f(x) = (\arcsin(x))^2$ y $g'(x) = 1$ se obtiene:

$$\int (\arcsin(x))^2 dx = x\arcsin^2(x) - \int \frac{2x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin^2(x) + 2\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \times \arcsin(x)dx$$

Integrando por partes la última integral considerando $g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ y $f(x) = \arcsin(x)$ resulta:

$$\int (\arcsin(x))^2 dx = x\arcsin^2(x) + 2[\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx]$$

$$= x\arcsin^2(x) + 2\arcsin(x)\sqrt{1-x^2} - 2x + c \blacksquare$$

2. *a)* Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Suponga que existen familias de particiones de $[0,1]$, $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} S(f,P_n) - s(f,Q_n) = 0$. Pruebe que f es Riemann-Integrable.

Solución: Probemos que f satisface la condición de Riemann:
Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de convergencia del límite de la hipótesis, se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$:

$$|S(f,P_n) - s(f,Q_n)| = S(f,P_n) - s(f,Q_n) < \varepsilon$$

donde el módulo se elimina pues sabemos que $S(f,P) \geq s(f,Q)$ para cualesquiera particiones P, Q.
Sea n cualquiera tal que $n \geq n_0$ (por ejemplo, $n = n_0$). Tomemos la partición refinada $P(\varepsilon) = P_n \cup Q_n$. Al ser un refinamiento de P_n y Q_n, esta partición satisface:

$$S(f,P(\varepsilon)) \leq S(f,P_n) \ \wedge\ s(f,P(\varepsilon)) \geq s(f,Q_n)$$

y por lo tanto:

$$S(f,P(\varepsilon)) - s(f,P(\varepsilon)) \leq S(f,P_n) - s(f,Q_n) < \varepsilon$$

$\blacksquare$

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable, con f'' continua. Sean además a y b fijos con $a < b$ y $f(a) = f(b) = 0$.

1) Pruebe que $\displaystyle\int_a^b f(x)f''(x)dx \leq 0$.
Solución: Integremos por partes con $u = f$, $v' = f''$, luego:

$$\int_a^b ff''dx = f(b)f'(b) - f(a)f'(a) - \int_a^b f' \cdot f'dx$$

$$= -\int_a^b (f')^2 dx \leq 0$$

donde en la primera igualdad hemos usado la condición $f(a) = f(b) = 0$ y en la segunda hemos concluído la desigualdad gracias al hecho de que $(f')^2$ es mayor o igual a cero.$\blacksquare$

2) Determine las funciones f para las cuales, bajo las hipótesis anteriores, se tiene que: $\displaystyle\int_a^b f(x)f''(x)dx = 0$

Solución: Supongamos que

$$\int_a^b ff''dx = 0 = -\int_a^b (f')^2 dx$$

donde la segunda igualdad es por la parte anterior. Es decir, tenemos que:

$$\int_a^b (f')^2 dx = 0.$$

Ahora, como f' es diferenciable y por lo tanto continua, se tiene que $(f')^2$ es continua y no negativa en $[a,b]$. Sabemos que cuando una función continua y no negativa integra cero en $[a,b]$, entonces esta función es identicamente nula en $[a,b]$, por lo tanto:

$$(f')^2(x) = 0, \forall x \in [a,b]$$

$$f'(x) = 0, \forall x \in [a,b]$$

lo que, por teorema del valor medio implica que f es constante en $[a,b]$, pero $f(a) = f(b) = 0$, por lo tanto f es la función nula en $[a,b]$ $\blacksquare$.

3. *a)* Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^3} + \sqrt[n]{e^4} + \cdots + \sqrt[n]{e^{n-1}} + \sqrt[n]{e^n}}{n}$$

Solución :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \exp(\frac{k}{n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f((x_k)^*)(x_k - x_{k-1})$$

Donde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) = e^x$, para la partición $P = \{x_k = \frac{k}{n} :\ k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ y $(x_k)^* = x_k = \frac{k}{n}$, entonces el valor del límite de la suma es $\int_0^1 e^x dx = e - 1$. $\blacksquare$

b) Muestre que la función $F(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4} dt$ tiene un punto crítico en $x = 0$. Decida si es mínimo o máximo.

Solución :

$$F'(x) = \frac{x^{12}}{1+x^8} \times 2x - \frac{x^{18}}{1+x^{12}} \times 3x^2 = \frac{x^{13}}{(1+x^8)(1+x^{12})}(2(1+x^{12}) - 3x^7(1+x^8))$$

$$F'(x) = \frac{x^{13}}{(1+x^8)(1+x^{12})}(2 + 2x^{12} - 3x^7 - 3x^{15})$$

Luego $F'(0) = 0$. En un vecindario de cero $2 + 2x^{12} - 3x^7 - 3x^{15} > 0$, $1 + x^8 > 0$ y $1 + x^{12} > 0$, por lo tanto el signo de $F'(x)$ en un vecindario de cero es el signo de x^{13}, que es el signo de x. Luego en un vecindario de la forma $(-\delta, 0)$ F es decreciente y en un vecindario de la forma $(0, \delta)$ f es creciente. Luego F en cero alcanza un mínimo. $\blacksquare$

c) Suponga que f es integrable en $[a,b]$. Demuestra que existe un número ξ en $[a,b]$ tal que $\displaystyle\int_a^{\xi} f(x)dx = \int_{\xi}^{b} f(x)dx$.

Solución :
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$, basta tomar $\xi = b$ (o $\xi = a$) . Supongamos que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = A \neq 0$. Como f es integrable en $[a,b]$, entonces f es integrable en cualquier subintervalo cerrado de $[a,b]$. Por lo tanto la funcion $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$, es continua. Notemos que $G(a) = -A$ y $G(b) = A$, como $A \neq 0$, se tiene que $G(a)G(b) = -A^2 < 0$ por TVI, existe $\xi \in [a,b]$ tal que $G(\xi) = 0$. $\blacksquare$

Puntajes C2 MA1002

P1

a) Completar cuadrado en la raíz **+1,0**; manipulaciones posteriores para llegar a la expresión final **+1,0**. (Escribo manipulaciones posteriores porque me parece muy probable que el problema sea desarrollado de varias formas distintas después de completar el cuadrado, siendo este paso previo esencial para continuar)

b) Realizar CORRECTAMENTE el cambio de variable t=tan(x/2) **+1.0**; manipular apropiadamente para deducir el valor pedido **+1.0** restantes.

c) Primera integración por partes **+1.0**; segunda integración por partes y conclusión **+1,0**.

P2

a) Plantear el problema como el cumplimiento de la condicion de Riemann **+0,5**; utilizar el límite de la hipótesis para encontrar particiones P_n, Q_n tales que S(f,P_n) - s(f,Q_n) < eps **+1,0**; Refinar para tener una sola partición en ambas sumas **+0,7** y concluir **+0,8**.

OJO: es posible (y mucho más rápido) argumentar del siguiente modo:
S(f,P_n) >= integral superior de f >= integral inferior de f >= s(f,Q_n) para todo n (de hecho para toda partición, no solo las de la hipótesis) y tomar límite para concluir la integrabilidad. DAR puntaje ad-hoc a este argumento (**+1,0** por la desigualdad, **+1,0** por tomar límite y **+1,0** por concluir que como las integrales superior e inferior son iguales, entonces f es integrable)

b) 1) Integrar por partes imponiendo las condiciones en x=a y x=b **+1,0**; concluir por tener -(integral) de una función no-negativa **+0,5**.
2) Concluir con la parte anterior que la integral de (f')^2 en [a,b] es nula **+0,5**; argumentar que gracias a la continuidad del integrando más su no negatividad permite concluir que debe ser nulo en [a,b] **+0,5**; concluir por TVM que f es constante en [a,b] y nula debido a f(a)=f(b)=0 **+0,5.**
Ojo: Si concluyen que f es nula en todo IR, castigar con 0,2.

P3

a) Identificar el límite como el límite de una suma de Riemann con sus componentes (f, intervalo, partición etc.) **+1,5**; concluir en virtud del conocimiento de la primitiva **+0,5**

b) Derivar F y obtener que x=0 es punto crítico **+1,0**; concluir bajo cualquier tipo de análisis (vecindad de x=0 en F', cálculo de F'', etc.) que es mínimo **+1,0**

c) Caso integral = 0 **+0,3**
Caso integral no nula: Definir la función apropiada (G) para aplicar TVI **+1,0**
Conclusión usando TVI **+0,7**

Control 2 MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2018-2

P1. *a*) Calcule las siguientes integrales, justificando debidamente sus pasos:

I. **(1.0 pto.)** $\displaystyle\int \frac{e^{3\theta}}{1+e^{2\theta}}d\theta$

II. **(1.0 pto.)** $\displaystyle\int \ln(\cos^2(x))\text{sen}(x)dx$

III. **(1.0 pto.)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+f(\frac{1}{4}-\text{sen}(x))}{\sec(x)}dx$

En donde la función f es impar y continua.

b) **(3.0 pts.)** Considere la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

Se sabe que esta función **no** es Riemann Integrable en el intervalo $I=[0,1]$.
Considere para $n\in\mathbb{N}$ fijo, la partición equiespaciada de I,

$$P=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n},1\right\}$$

Calcule explícitamente, en términos de n, el valor de $s(f,P)$ y pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} s(f,P)=\frac{1}{2}$$

Indicación: Recuerde que $1+2+...+m=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}k=\frac{m(m+1)}{2}$

P2. *a*) **(2.0 pts.)** Determine la función f continua y el valor de la constante a que cumplen la ecuación

$$6+\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt=2\sqrt{x}$$

b) **(2.0 pts.)** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt=f(x)+\cos(x)$. Determine el valor de $f'(0)$, indicando cómo obtuvo el resultado.

c) **(2.0 pts.)** Sea $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ una función continua, biyectiva y dos veces derivable en su dominio. Se define la función g como sigue:

$$g(x)=\int_0^x xf(t)dt+\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$$

Pruebe que $g''(x)=2f(x)+(x+1)f'(x)+xf''(x)$

P3. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas como

$$f(x) = 1 - 2x + x^2 \qquad g(x) = 1 + 2x - x^2$$

Llamemos $\mathcal{R}$ a la región definida como

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

a) **(2.0 pts.)** Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

b) **(2.0 pts.)** Calcule el volumen de revolución que crea la región $\mathcal{R}$ al rotar en torno al eje X.

c) **(2.0 pts.)** Calcule el volumen de revolución que crea la región $\mathcal{R}$ al rotar en torno al eje Y.

Formulario:

$$A = \int_a^b h(x)dx \quad V = \pi \int_a^b h^2(x)dx \quad V = 2\pi \int_a^b xh(x)dx \quad V = \int_a^A (x)dx$$

Tiempo 3:00 hrs.

Cálculo Diferencial e Integral (MA1002)

Control 2 Pauta Problema 1 (2018-02)

a) I) Calcular $I=\int \frac{e^{3\theta}}{1+e^{2\theta}}\,d\theta$ se puede escribir como $\int \frac{e^{2\theta}e^{\theta}dt}{1+e^{2\theta}}$

y con la sustitución $u=e^{\theta}$, $du=e^{\theta}dt$ la integral queda $I=\int \frac{u^2du}{1+u^2}=\int\frac{u^2+1-1}{1+u^2}du=\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)du=$

$= u-\operatorname{arctg}u+C = e^{\theta}-\operatorname{arctg}e^{\theta}+C$

II) Calcular $I=\int \ln(\cos^2(t))\,\operatorname{sen}t\,dt$ sustitución $\begin{cases}u=\cos t\\ du=-\operatorname{sen}t\,dt\end{cases}$

$\Rightarrow I=-\int \ln(u^2)\,du=-2\int \ln(u)\,du=-2\left[u\ln u-\int u\cdot\frac{1}{u}du\right]$

partes: $\begin{cases}z=\ln u\rightarrow dz=\frac{1}{u}du\\ v=du\rightarrow v=u\end{cases}$

$\Rightarrow I=-2\left[u\ln u-u\right]+C=-2\left[\cos t\ln(\cos t)-\cos t\right]+C$

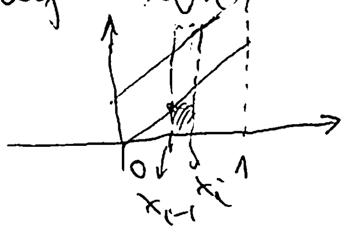
III) Calcular $I=\int_0^{\pi/6}\frac{1+f(\frac14-\operatorname{sen}x)}{\sec(x)}dx=\int_0^{\pi/6}\left[1+f(\tfrac14-\operatorname{sen}x)\right]\cos x\,dx$

Sustitución $u=\frac14-\operatorname{sen}x$, $du=-\cos x\,dx$ y $\begin{cases}x=0\Rightarrow u=1/4\\ x=\pi/6\Rightarrow u=\frac14-\frac12=-\frac14\end{cases}$

$\Rightarrow I=-\int_{1/4}^{-1/4}[1+f(u)]\,du=\int_{-1/4}^{1/4}(1+f(u))\,du=\int_{-1/4}^{1/4}du+\underbrace{\cancel{\int_{-1/4}^{1/4}f(u)\,du}}_{\to 0}$

pero $\int_{-1/4}^{1/4}f(u)\,du=0$ pues f es IMPAR integrado entre límites simétricos con respecto al origen. Así, $I=\int_{-1/4}^{1/4}du=\frac12$

b) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x+1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$



$s(f,P)=\sum f(x_{i-1})\Delta x_i$

Claramente $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}=\frac1n$ y $f(x_{i-1})=x_{i-1}=\frac{i-1}{n}$

en $\mathbb{Q}$ x es el ínfimo en $[x_{i-1},x_i]\Rightarrow s(f,P)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-1}{n}\frac1n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\frac{(n-1)n}{2n^2}=\frac{n-1}{2n}$

Además $\lim s(f,P)=1/2$ (ó $s(f,P)\rightarrow 1/2$)

Punto Problema 2

a) Determinar $f(x)$ y el valor de la constante a que cumplen

$$6+\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x} \quad (*)$$

El valor de a puede calcularse, por ejemplo, si se hace $x=a$ en $(*)$. Así

$$\overset{3}{\cancel{6}} + \underbrace{\int_a^a \frac{f(t)}{t^2}\,dt}_{0} = \cancel{2}\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \Rightarrow a = 9$$

Derivando $(*)$:

$$\frac{f(x)}{x^2} = \cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x^{3/2}$$

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua y $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = f(x) + \cos x$. Calcular $f'(0)$

Derivando

$$f(x)\cdot\underbrace{(x)'}_{1} - f(-x)\underbrace{(-x)'}_{-1} = f'(x) - \operatorname{sen} x$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = f'(x) - \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = f(x) + f(-x) + \operatorname{sen} x$$

Así

$$f'(0) = 2f(0) + \overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(0)}} = 2f(0)$$

y para $f(0)$, $x=0$ en

$$\overset{0}{\cancel{\int_0^0 f(t)\,dt}} = f(0) + \overset{1}{\cos(0)} \Rightarrow f(0) = -1$$

Sigue que $f'(0) = 2f(0) = -2$

c) $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ continua y biyectiva, dos veces derivable

$$g(x) = \int_0^x x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$$

Probar que $g''(x) = 2f(x) + (x+1)f'(x) + xf''(x)$

Es básico reconocer que en la primera integral, x es factor

Derivando:

$$g'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x) + \underbrace{f^{-1}(f(x))}_{x}\cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + x f(x) + x f'(x)$$

y Derivando

$$g''(x) = f(x) + f(x) + xf'(x) + f'(x) + xf''(x)$$

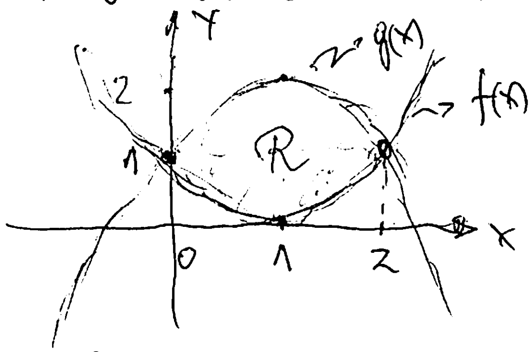
$$\Rightarrow g''(x) = 2f(x) + (x+1)f'(x) + xf''(x)$$

Punto Problema 3

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 1 - 2x + x^2$, $g(x) = 1 + 2x - x^2$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x) \leq y \leq g(x)\}$

a) Calcular el área de la región R



Las parábolas $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $g(x) = f(x) \Rightarrow 1 + 2x - x^2 = 1 - 2x + x^2$

$\Rightarrow \cancel{2}x^2 = \cancel{4}^{2}x \Rightarrow x = 0 \wedge x = 2$, $f(0) = g(0) = 1$

y $f(2) = g(2) = 1$

$$\text{Area}(R) = \int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^2 [(1+2x-x^2) - (1-2x+x^2)]\,dx$$

$$\Rightarrow A(R) = \int_0^2 [4x - 2x^2] = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}, \quad A(R) = \frac{8}{3}$$

b) Volumen de Revolución de R en torno al eje OX

$$V_{ox} = \pi \int_0^2 (g^2(x) - f^2(x))\,dx = \pi \int_0^2 (g(x) + f(x))(g(x) - f(x))\,dx$$

$$= \pi \int_0^2 2(4x - 2x^2)\,dx = 2\pi\left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \frac{16}{3}\right)$$

$$\Rightarrow V_{ox} = \frac{16\pi}{3}$$

c) Volumen de Revolución de R entorno al eje OY

$$V_{oy} = 2\pi \int_0^2 x(g(x) - f(x))\,dx = 2\pi \int_0^2 x(4x - 2x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4x^2 - 2x^3) = 2\pi\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_0^2 = 2\pi\left[\frac{32}{3} - 8\right] = 2\pi\,\frac{8}{3}$$

Así $V_{oy} = \dfrac{16\pi}{3}$

Rúbrica Control 2 MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile. Semestre 2018-2

P1. Esta pregunta posee dos partes. En la primera se evalúa el cálculo de primitivas y manejo de cambios de variable. En la segunda parte se evalúa el conocimiento de la definición de la integral de Riemann.

a) I.
- Proponer sustitución o cambio de variables: 0.5 pts.
- Obtener el resultado de la integral correctamente 0.5 pts. (otorgar puntaje si es que el cambio de variables está mal hecho, pero el resultado obtenido está correcto de acuerdo a la integral que les resultó).

II.
- Proponer sustitución o cambio de variables: 0.5 pts.
- Obtener el resultado de la integral correctamente 0.5 pts. (otorgar puntaje si es que el cambio de variables está mal hecho, pero el resultado obtenido está correcto de acuerdo a la integral que les resultó).

III.
- Proponer sustitución o cambio de variables: 0.2 pts.
- Identificar el resultado de una función impar en dominio simétrico: 0.3 pts.
- Obtener correctamente el resultado: 0.5 pts. (otorgar puntaje si es que el cambio de variables está mal hecho, pero el resultado obtenido está correcto de acuerdo a la integral que les resultó).

b)
- Identificar el valor de Δ_k: 0.5 pts.
- Reconocer el valor de m_k: 1.0 pts.
- Obtener correctamente el resultado de la suma: 0.5 pts. (0 si hay error).
- Obtener correctamente el límite: 1.0 pts. (0 si hay error).

P2. Esta pregunta evalúa el conocimiento del Teorema Fundamental del Cálculo, aplicado a diferentes contextos, además de repasar el conocimiento de derivación en un contexto con integrales.

a)
- Obtener correctamente el valor de la constante a: 0.5 pts. (0 si hay error).
- Derivar correctamente aplicando el TFC y justificando las hipótesis: 1.0 pto. (0.5 si no se justifica el TFC).
- Obtener f: 0.5 pts.

b)
- Aplicar correctamente la derivada a la integral: 1.0 pto. (0 si hay error).
- Obtener correctamente el valor de $f'(0)$: 0.5 pts. (0 si hay error, 0.2 si es consistente con lo obtenido anteriormente).
- Obtener correctamente el valor de $f(0)$: 0.5 pts. (0 si hay error, 0.2 si es consistente con lo obtenido anteriormente).

c)
- Reconocer que x en la primera integral es un factor y sale de la misma: 0.3 pts.

- Derivar correctamente la integral: 0.5 pts. (0 si hay error).
- Reconocer que $f^{-1}(f(x)) = x$: 0.2 pts.
- Obtener correctamente la segunda derivada: 0.5 pts. (0 si hay error, 0.2 si es consistente con lo obtenido anteriormente).
- Obtener correctamente el resultado final: 0.5 pts. (0 si hay error).

P3. Esta pregunta evalúa el conocimiento del estudiante sobre las integrales de área y volumen, además de la capacidad para identificar una región descrita de manera formal.

a)
- Reconocer la región a través de las intersecciones de las curvas: 1.0 pts. (0.5 si hay un error, 0 si ambos son incorrectos).
- Obtener correctamente el valor del área: 1.0 pts. (0 si hay error, 0.5 si es consistente con lo obtenido anteriormente).

b)
- Reconocer la fórmula correcta para obtener el resultado: 0.5 pts.
- Obtener correctamente el resultado del volumen: 1.5 pts. (0 si hay error, 0.5 si es consistente con la fórmula planteada).

c)
- Reconocer la fórmula correcta para obtener el resultado: 0.5 pts.
- Obtener correctamente el resultado del volumen: 1.5 pts. (0 si hay error, 0.5 si es consistente con la fórmula planteada).

MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Natalia Ruiz, Raúl Uribe, Cristián Reyes.

Control 2

1. Calcule las siguientes integrales y primitivas.

   a) **[2 puntos]** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

   b) **[2 puntos]** $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

   c) **[2 puntos]** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4+3\cos(x)}$

2. *a*) Considere la función $f : [0,2]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0,1] \\ 2, & \text{si } x \in (1,2] \end{cases}$$

   i) **[1 punto]** Para la partición $P = \{0, 6/7, 1, 8/7, 2\}$, calcule la suma inferior $s(f,P)$ y la suma superior $S(f,P)$.

   ii) **[2 puntos]** Demuestre que la función f es Riemann integrable en el intervalo $[0,2]$.

   b) **[3 puntos]** Calcule el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times [\ln(n+i) - \ln(n)] \, .$$

3. *a*) **[3 puntos]** Demuestre que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ (Indicación: Es posible que necesite usar la igualdad $\arccos(u) + \arccos(-u) = \pi$)

   b) **[3 puntos]** Sea f derivable en todo $\mathbb{R}$, para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} (x-t)f(t)dt$. Demuestre que si f es decreciente en todo $\mathbb{R}$, entonces $g''(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. (Indicación: Es posible que necesite usar TVM en el intervalo $[x, x+1]$ para f.)

MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Natalia Ruiz, Raúl Uribe, Cristián Reyes.

Control 2

1. Calcule las siguientes integrales y primitivas.

   a) **[2 puntos]** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$
   Solución: $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx = \int dx - \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = x - \ln(e^x+1)$

   b) **[2 puntos]** $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$
   Solución: Haciendo el cambio de variable $u=\sqrt{x}$, se obtiene

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{(1-u)u}{1+u}du = -2\int \frac{u^2-u}{1+u}du = -2\int \frac{u^2-u-2+2}{1+u}du$$

$$= -2\int \frac{(u+1)(u-2)+2}{1+u}du = -2\int (u-2)du - 4\int \frac{du}{1+u} = -u^2+4u-4\ln(u+1)$$

$$= -x + 4\sqrt{x} - 4\ln(\sqrt{x}+1)$$

   c) **[2 puntos]** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4+3\cos(x)}$

   Solución: Primero calcularé una primitiva y luego evaluaré los límites de integración. Haciendo el cambio de variable $t=\tan(\frac{x}{2})$, resulta $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$, entonces:

$$\int \frac{dx}{4+3\cos(x)} = \int \frac{1}{4+3(\frac{1-t^2}{1+t^2})} \times \frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{4(1+t^2)+3(1-t^2)}dt = 2\int \frac{1}{7+t^2}$$

$$= \frac{2}{7}\int \frac{1}{1+(\frac{t}{\sqrt{7}})^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{t}{\sqrt{7}}) = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{7}})$$

   Luego,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{4+3\cos(x)} = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{\tan(\frac{\pi}{6})}{\sqrt{7}}) = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{7}}) = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{21}})$$

2. *a)* Considere la función $f:[0,2]$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x\in[0,1] \\ 2, & \text{si } x\in(1,2] \end{cases}$$

   i) **[1 punto]** Para la partición $P=\{0,6/7,1,8/7,2\}$, calcule la suma inferior $s(f,P)$ y la suma superior $S(f,P)$.
   Solución: A continuación calcularemos la suma inferior de f para la partición P, $s(f,P)$, y la suma superior $S(f,P)$, donde $m_i = \inf\{x : x\in[x_{i-1},x_i]\}$ y $M_i = \sup\{x : x\in[x_{i-1},x_i]\}$.

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{4} m_i(x_i-x_{i-1}) = 1(6/7-0)+1(1-6/7)+1(8/7-1)+2(2-8/7)=20/7, \text{y}$$

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{4} M_i(x_i-x_{i-1}) = 1(6/7-0)+1(1-6/7)+2(8/7-1)+2(2-8/7)=21/7=3.$$

ii) **[2 puntos]** Demuestre que la función f es Riemann integrable en el intervalo $[0,2]$.
Solución 1: Demostraremos que f satisface la condición de Riemann, es decir,

$$\forall \epsilon>0, \exists\, P \text{ tal que } S(f,P)-s(f,P)<\epsilon.$$

Consideremos la partición $P=\{0,1-\frac{1}{n},1,1+\frac{1}{n},2\}=\{0,\frac{n-1}{n},1,\frac{n+1}{n},2\}$, donde n es un natural distinto de 1. Calcularemos la suma inferior y superior de f para esta partición.

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{4} m_i(x_i-x_{i-1}) = 1\left(\frac{n-1}{n}-0\right)+1\left(1-\frac{n-1}{n}\right)+1\left(\frac{n+1}{n}-1\right)+2\left(2-\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=1\times\frac{n-1}{n}+1\times\frac{1}{n}+1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{n-1}{n}=\frac{3n-1}{n}=3-\frac{1}{n}, \text{ y}$$

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{4} M_i(x_i-x_{i-1}) = 1\times\frac{n-1}{n}+1\times\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n}+2\times\frac{n-1}{n}=3.$$

Entonces

$$S(f,P)-s(f,P)=\frac{1}{n}.$$

Dado $\epsilon>0$ (fijo), $\exists N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N}<\epsilon$ por Propiedad de Arquimedes. Entonces la partición $P=\{0,1-\frac{1}{N},1,1+\frac{1}{N},2\}$ satisface $S(f,P)-s(f,P)=\frac{1}{N}<\epsilon$.

Solución 2: Se podría considerar la partición $P=\{0,1-\delta,1,1+\delta,2\}$, donde $0<\delta<1$. De este modo, $s(f,P)=3-\delta$ y $S(f,P)=3$. Entonces $S(f,P)-s(f,P)=\delta$. Así, dado $\epsilon>0$, basta tomar $\delta<\epsilon$; por ejemplo $\delta=\frac{\epsilon}{2}$.

b) **[3 puntos]** Calcule el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\left[\ln(n+i)-\ln(n)\right].$$

Solución:
Tenemos que:

$$\frac{1}{n}\times[\ln(n+i)-\ln(n)]=\frac{1}{n}\times\ln\left(\frac{n+i}{n}\right)=\frac{1}{n}\times\ln\left(1+\frac{i}{n}\right).$$

Al relacionar la suma dada a una suma de Riemann, la partición del intervalo $[a,b]$ será equiespaciada con $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$, y así $b-a=1$. Además, $x_i=a+i\frac{b-a}{n}=1+\frac{i}{n}$, luego $a=1$. Por tanto, $a=1$, $b=2$ y $f(x)=\ln(x)$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times[\ln(n+i)-\ln(n)]=\int_1^2\ln(x)dx=2\ln(2)-2-[1\ln(1)-1]=2\ln(2)-1.$$

3. *a*) **[3 puntos]** Demuestre que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \pi\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Solución: Haciendo el cambio $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$ resulta

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = -\int_1^{-1} \frac{\arccos(u)}{1+u^2}du$$

Invirtiendo los límites de integración resulta:

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int_{-1}^1 \frac{\arccos(u)}{1+u^2}du = \int_{-1}^0 \frac{\arccos(u)}{1+u^2}du + \int_0^1 \frac{\arccos(u)}{1+u^2}du$$

Para el primer sumando de la derecha haremos el cambio $u = -z$, lo que resulta:

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int_0^1 \frac{\arccos(-z)}{1+z^2}dz + \int_0^1 \frac{\arccos(u)}{1+u^2}du$$

Notamos ahora que $\arccos(z) + \arccos(-z) = \pi$ y reemplazamos en el primer sumando de la derecha:

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \int_0^1 \frac{\pi - \arccos(z)}{1+z^2}dz + \int_0^1 \frac{\arccos(u)}{1+u^2}du$$

De donde se deduce que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \pi\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

b) **[3 puntos]** Sea f derivable en todo $\mathbb{R}$, para cada $x \in \mathbb{R}$ se define $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+1}(x-t)f(t)dt$.

Demuestre que si f es decreciente en todo $\mathbb{R}$, entonces $g''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

$$g(x) = x\int_x^{x+1} f(t)dt - \int_x^{x+1} tf(t)dt$$

Entonces

$$g'(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt + x(f(x+1) - f(x)) - ((x+1)f(x+1) - xf(x))$$

$$g'(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt - f(x+1)$$

Entonces

$$g''(x) = (f(x+1) - f(x)) - f'(x+1)$$

Por TVM sabemos que existe $\xi \in [x, x+1]$ tal que

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f'(\xi)$$

Pero como f es decreciente se tiene que $f'(\xi) \geq f'(x+1)$. Por lo tanto

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f'(\xi) \geq f'(x+1)$$

De donde resulta que

$$f(x+1) - f(x) - f'(x+1) \geq 0$$

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 2, MA-100 Cálculo Diferencial e Integral
Semestre 2020/2 (21 de Noviembre)

P1. (a) Calcule las siguientes primitivas (**1.5 puntos** cada una):

$$i) \int x^2 \operatorname{sen}(x)dx, \qquad ii) \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

Solución:

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x)dx = \cdots \qquad \text{; por partes: } \boxed{\begin{array}{rclrcl} F &=& x^2 & \rightarrow F' &=& 2x \\ G' &=& \operatorname{sen}(x) & G &=& -\cos(x) \end{array}}$$

$$= -x^2\cos x + \int 2x\cos(x)dx$$

0.5

$$\text{; por partes: ; } \boxed{\begin{array}{rclrcl} F &=& 2x & \rightarrow F' &=& 2 \\ G' &=& \cos(x) & G &=& \operatorname{sen}(x) \end{array}}$$

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen}(x) - \int 2\operatorname{sen}(x)$$

0.5

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) + C$$

0.5

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \cdots \qquad \text{; sustitución: } \begin{array}{rcl} u &=& \sqrt{x} \\ du &=& \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

$$= \int 2\sqrt{1+u}\, du \qquad ;$$

0.5

$$= \frac{4}{3}(1+u)^{3/2} + C \qquad ;$$

0.5

$$= \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + C$$

0.5

OBS: restar 0.5 puntos si faltan las 2 constantes de integración.

(b) Considere la primitiva

$$I = \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$$

i) (**1 punto**) Determine las constantes A, B, C, D tales que

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{2Cx+D}{1+x^2}$$

Solución: Sumando queda:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{2Cx+D}{1+x^2} = \frac{Ax(1+x^2)+B(1+x^2)+2Cx^3+Dx^2}{x^2(1+x^2)}$$
$$= \frac{x^3(A+2C)+x^2(B+D)+Ax+B}{x^2(1+x^2)}$$

0.5

Para que la igualdad pedida sea cierta, es necesario que:

$$A+2C=0, \qquad B+D=0, \qquad A=0, \qquad B=1$$

0.3

Es decir:

$$A=0, \qquad C=0, \qquad B=1, \qquad D=-1$$

0.2

ii) (**2 puntos**) Calcule la primitiva I (puede dejarla en términos de A, B, C, D).

Solución: **Alternativa 1:** Si no se calcularon las constantes:

$$I = A\ln|x| - \frac{B}{x} + C\ln(1+x^2) + D\arctan(x) + C^{te}$$

(**0.5 ptos cada primitiva**, menos 0.5 si falta C^{te})

2.0

Alternativa 2: Si se calcularon las constantes:

$$I = -\frac{1}{x} - \arctan(x) + C^{te}$$

(**1.0 ptos cada primitiva**, menos 0.5 si falta C^{te})

2.0

P2. (a) (**3 puntos**) Para acotar la integral de $f(x)=\sqrt{x}$ en $[0,1]$ se propone usar una partición $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ $(n\geq 1)$ donde $x_i = \frac{i^2}{n^2}$ $\quad \forall i=0,\ldots,n$.
Construya la **menor** función escalonada asociada a P que acota **superiormente** a f. Calcule su integral para obtener cotas superiores de la integral de f (en términos de n).

Solución: La partición está definida por: $x_i = \frac{i^2}{n^2}$, por lo tanto $x_{i-1} = \frac{(i-1)^2}{n^2} = \frac{i^2-2i+1}{n^2}$
De este modo, el largo del i-ésimo intervalo está dado por:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{i^2-(i^2-2i+1)}{n^2} = \frac{2i-1}{n^2}$$

1.0

Cómo $\sqrt{x}$ es creciente, la menor función escalonada asociada a P es la función escalonada e que vale en cada intervalo

$$e_i = \sqrt{x_i} = \frac{i}{n} \qquad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

1.0

Con esto, su integral vale

$$\int_0^b e = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{(2i-1)}{n^2} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (2i^2 - i)$$

0.5

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

0.5

(b) (**3 puntos**) Sea f una función acotada en $[a,b]$, donde $a<b$. Se sabe que: $\forall c \in (a,b)$ f es Riemann integrable en el intervalo $[a,c]$. Usando esta información, demuestre que f también es Riemann integrable en $[a,b]$.

Indicación: Note que si $e(x)$ es una función escalonada en $[a,c]$, para $c \in (a,b)$, entonces la función

$$E(x) = \begin{cases} e(x) & si\ x \in [a,c] \\ \alpha & si\ x \in (c,b], \end{cases}$$

para cualquier constante α, es una función escalonada en $[a,b]$.

Solución: Como f es acotada, existen m y M que denotan al ínfimo y al supremos de f en $[a,b]$.

0.5

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Se demostrará que f satisface la Condición de Riemann en $[a,b]$.

Para cualquier $c \in [a,b)$ (que se precisará al final), sabemos que f es Riemann integrable en $[a,c]$. Por lo tanto, existen funciones escalonadas e_- y e_+, del intervalo $[a,c]$ tales que

$$e_-(x) \leq f(x) \leq e_+(x) \qquad \forall x \in [a,c] \qquad \text{y} \qquad \int_a^c (e_+ - e_-) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

1.0

El truco es formar nuevas funciones escalonadas por abajo y arriba de f, pero en todo el intervalo $[a,b]$.
IDEA: Consideremos las funciones escalonadas

$$E_-(x) = \begin{cases} e_-(x) & \text{si } x \in [a,c] \\ m & \text{si } x \in (c,b] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad E_+(x) = \begin{cases} e_+(x) & \text{si } x \in [a,c] \\ M & \text{si } x \in (c,b] \end{cases}$$

Claramente:

$$E_-(x) \leq f(x) \leq E_+(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

0.5

Además

$$\int_a^b (E_+ - E_-) = \int_a^c (e_+ - e_-) + (M-m)(b-c) \leq \frac{\varepsilon}{2} + (M-m)(b-c).$$

0.5

Para concluir, basta con escoger c suficientemente cercano a b, de modo que $(b-c) \leq \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$

0.5

Tiempo de Trabajo: 2 horas

MA1002 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Andrés Contreras-Donato Vásquez Varas
Auxiliares: Ignacia Segura-Camilo Gómez
13 de julio de 2020

Pauta Tarea 1

Instrucciones:

- La materia evaluada en esta tarea corresponde a las semanas 5 a la 9 del apunte del curso.
- La duración estimada de cada pregunta es de 40 minutos.
- Debe desarrollar cada una de las preguntas a mano y entregar una copia escaneada a través de la sección de Tareas en u-cursos.
- La fecha límites para la entrega es el 24 de junio a las 23:59.
- Se aceptarán atrasos hasta el 26 de junio a las 23:59, con un descuento de 5 décimas por día.

P1. Considere una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.

(a) (*2.0 pts*) Suponga que existe un $c \in (a, b)$ tal que f es continua en $[a, c)$ y en $(c, b]$, pero discontinua en c. Demuestre que f es integrable en $[a, b]$.
<u>Solución</u>: Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $[c - \delta, c + \delta] \subset [a, b]$ y además

$$\left(\sup_{x\in[c-\delta,c+\delta]} f(x) - \inf_{x\in[c-\delta,c+\delta]} f(x) \right) 2\delta < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como f es continua en $[a, c - \delta]$ y $[c + \delta, b]$, entonces ha de ser integrable en cada uno de estos intervalos(*0.5 pts*). Luego, existe una partición $P_{1,\epsilon} = \{a, x_1, \ldots, c - \delta\}$ de $[a, c - \delta]$ y una partición $P_{2,\epsilon} = \{c + \delta, x_{n+1}, \ldots, b\}$ de $[c + \delta, b]$ tal que

$$S(P_{1,\epsilon}, f) - s(P_{1,\epsilon}, f) < \frac{\epsilon}{4}.$$

$$S(P_{2,\epsilon}, f) - s(P_{2,\epsilon}, f) < \frac{\epsilon}{4}.(\textit{0.5 pts})$$

Con estas dos particiones definimos $P_\epsilon = P_{1,\epsilon} \cup P_{2,\epsilon} = \{a, x_1, \ldots, c - \delta, c + \delta, b\}$, el cual representa una partición del intervalo $[a, b]$(*0.5 pts*). Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned} S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) &= S(P_{1,\epsilon}, f) - s(P_{1,\epsilon}, f) + S(P_{2,\epsilon}, f) - s(P_{2,\epsilon}, f) \\ &+ \left(\sup_{x\in[c-\frac{\epsilon}{4},c+\delta]} f(x) - \inf_{x\in[c-\delta,c+\delta]} f(x) \right) 2\delta \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned} \tag{1}$$

y por lo tanto

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon.$$

Como esto es válido para $\epsilon > 0$ cualquiera, concluimos por la condición de Riemann que f es integrable en $[a, b]$(*0.5 pts*).

(b) (*2.0 pts*) Suponga ahora que f es discontinua en un conjunto de puntos $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, pero continua en $[a,b] \setminus E$. Demuestre que f es integrable en $[a,b]$.

<u>Solución</u>: Por inducción en el número de puntos de E, el problema se puede reducir al caso anterior(*0.3 pts*). El caso base $|E| = 0$ es evidente. Supongamos ahora que si $|A| = n-1$ para un $n > 1$ y la función f es continua en $[a,b] \setminus A$, entonces es integrable en $[a,b]$(*0.2 pts*). Vamos a demostrar que si $|E| = n$ entonces f también es integrable en $[a,b] \setminus E$. Sea $E' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Por la hipótesis inductiva, sabemos que f es integrable en $[a, x_{n-1} - \delta]$ para todo $\delta > 0$ tal que $x_{n-1} - \delta > a$(*0.2 pts*).

Por otro lado, utilizando la parte (a), se tiene que f es integrable en $[x_{n-1} + \delta, b]$ para todo δ tal que $x_{n-1} + \delta < b$ (*0.3 pts*). Repitiendo los pasos de la parte anterior, podemos argumentar que dado $\epsilon > 0$, existe una partición $P_{1,\epsilon}$ de $[a, x_{n-1} - \delta]$ y una partición $P_{2,\epsilon}$ de $[x_{b-1} + \delta, b]$, tales que juntándolas se obtiene que $P = P_{1,\epsilon} \cup P_{2,\epsilon}$ es una partición de $[a,b]$ con la cual se satisface

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) < \epsilon.(\textit{0.5 pts})$$

Por la condición de Riemann, se concluye que f es integrable en $[a,b]$(*0.5 pts*).

(c) (*2.0 pts*) Considere ahora una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ estrictamente creciente tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ y suponga que f es una función continua en $[a,b] \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Utilizando la parte **(b)** demuestre que f es integrable en $[a,b]$.

Indicación: Para un ϵ fijo, argumente que existe un x_k y una partición P_k de $[a, x_k]$ tal que $\left(\sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right) |x_k - b| \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $S(P_k, f) - s(P_k, f) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

<u>Solución</u>: Dado que f es discontinua y acotada, tenemos $0 < \left(\sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right) < \infty$ (*0.2 pts*). Por la convergencia de $\{x_n\}$, se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe x_k tal que

$$|x_k - b| \leq \frac{\epsilon}{2}\left(\sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right)^{-1}.(\textit{0.3 pts})$$

Podemos reescribir esto como

$$\left(\sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right)|x_k - b| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Por la parte (b) sabemos que f es integrable entre $[a, x_k + \delta]$ para cualquier $\delta > 0$ tal que $x_k + \delta < b$ (*0.2 pts*). Luego existe una partición $P_{1,\epsilon} = \{a, y_1, \ldots, y_n = x_k\}$ de $[a, x_k]$ tal que

$$S(P_{1,\epsilon}, f) - s(P_{1,\epsilon}, f) \leq \frac{\epsilon}{2}.(\textit{0.3 pts})$$

Definimos $P_\epsilon = \{a, y_1, \ldots, y_n = x_k, y_{n+1} = b\}$, el cual es una partición de $[a,b]$(*0.5 pts*). Entonces

$$S(P_\epsilon, f) - s(P_\epsilon, f) = S(P_{1,\epsilon}, f) - s(P_{1,\epsilon}, f) + \left(\sup_{x\in[x_k,b]} f(x) - \inf_{x\in[x_k,b]} f(x)\right)(b - x_k) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

con lo que se obtiene que f satisface la condición de Riemann(*0.3 pts*). Por lo tanto f es integrable en $[a,b]$(*0.2 pts*).

P2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica de periodo 1. Se desea demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx.$$

Para esto siga los siguientes pasos:

(a) (*3.0 pts*) Utilizando el cambio de variables $y = xn$, demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f\left(\frac{k+x}{n}\right)g(x)dx$$

<u>**Solución**</u>**:** Según el cambio de variables sugerido $dx = \frac{dy}{n}$. Entonces

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^n f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy(\textit{0.6 pts})$$

Notemos que $[0, n] = [0, 1] \cup [1, 2] \cup \ldots [n-1, n]$ y usando aditividad horizontal de la integral obtenemos:

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy.(\textit{0.6 pts})$$

En la integral $\displaystyle\int_k^{k+1} f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy$ podemos usar el cambio de variables $z + k = y$, para así obtener

$$\int_k^{k+1} f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy = \int_0^1 f\left(\frac{z+k}{n}\right)g(z+k)dz.(\textit{0.6 pts})$$

Pero la función g es 1-periódica y por lo $g(x) = g(x+k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\int_k^{k+1} f\left(\frac{y}{n}\right)g(y)dy = \int_0^1 f\left(\frac{z+k}{n}\right)g(z)dz(\textit{0.6 pts})$$

Reemplazando nos queda

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f\left(\frac{k+x}{n}\right)g(x)dx \tag{2}$$

que es los que se nos pedía demostrar(*0.6 pts*).

(b) (*1.5 pts*) suponga además que g es positiva en $[0, 1]$. Utilizando la parte anterior y el Teorema del Valor Medio para integrales, pruebe que existe una sucesión $\{s_k\} \subset [0, 1]$ tal que:

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 g(x)dx\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+s_k}{n}\right)\right).$$

<u>**Solución**</u>**:** En la integral

$$\int_0^1 f\left(\frac{x+k}{n}\right)g(x)dx$$

podemos aplicar el Teorema del Valor Medio generalizado para integrales y deducir que existe un $s_k \in [0, 1]$ tal que

$$\int_0^1 f\left(\frac{x+k}{n}\right)g(x)dx = f\left(\frac{s_k+k}{n}\right)\int_0^1 g(x)dx.(\textit{0.8 pts})$$

Luego reemplazando en (2) obtenemos:

$$\int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 g(x)dx\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+s_k}{n}\right)\right).(\textit{0.7 pts})$$

y con esto concluimos esta parte.

(c) (*1.5 pts*) Concluya que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x) \int_0^1 g(x)dx.$$

Solución: Consideremos la partición $P = \left\{0, \ldots, \frac{k}{n}, \ldots, 1\right\}$ del intervalo $[0,1]$(*0.2 pts*). Sea $\{s_k\} \subset [0,1]$ la sucesión obtenida en el ítem anterior. Note que $\frac{s_k + k}{n} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ para todo $k = 0, \cdots, n$(*0.3 pts*). Dado que f es continua, se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{s_k + k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.(\textit{0.5 pts}) \tag{3}$$

Finalmente, ocupando (3) y la parte **(b)**, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g(nx)f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx.(\textit{0.5 pts})$$

P3. **(a)** (*2.0 pts*) Encuentre las siguientes primitivas:

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2}dx$

Solución:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2}dx = \int 1 + \frac{1}{x^2}dx = x - \frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}(\textit{0.5 pts})$$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}dx$

Solución: Utilizando el cambio de variables $x = 2\tan(\theta)$ obtenemos

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{\tan^2(\theta)}{\sec(\theta)}d\theta = \int \sec(\theta) - \cos(\theta)d\theta.(\textit{0.2 pts})$$

Ambas integrales son conocidas y obtenemos

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}dx = (\ln(|\sec(\theta) + \tan(\theta)|) - \operatorname{sen}(\theta)) + C(\textit{0.3 pts})$$

Devolviéndose en el cambio de variables tenemos que $\theta = \arctan(\frac{x}{2})$y por lo tanto

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}dx = \left(\ln(|\sec(\arctan(\frac{x}{2})) + \frac{x}{2}|) - \operatorname{sen}(\arctan(\frac{x}{2}))\right) + C(\textit{0.2 pts})$$

Podemos reemplazar $\sec(\arctan(\frac{x}{2})) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}$ y $\operatorname{sen}(\arctan(\frac{x}{2})) = \frac{x}{2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}}$ y obtener

$$\int \frac{x^2}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \ln\left|\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}(\textit{0.3 pts})$$

(iii) $\displaystyle\int x\cosh x dx$

Solución: Utilizando integración por partes, definimos $u = x$ y $dv = \cosh(x)dx$ obtenemos

$$\int x\cosh x dx = x\operatorname{senh}(x) - \int senh(x)dx = x\operatorname{senh}(x) - \cosh(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.(\textit{0.5 pts})$$

(b) (*2.0 pts*) Calcule las siguientes integrales:

(i) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{5+4\cos(\theta)}$

Solución: Utilizamos el cambio de variables $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\text{sen}(\theta) = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$, $\cos(\theta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$, $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$, obtenemos

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{5+4\cos(\theta)} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{9+t^2} \textit{(0.5 pts)}$$

Utilizando el cambio de variables $3y = t$, nos queda

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{d\theta}{5+4\cos(\theta)} = \int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{2}{3(1+y^2)} dy = \frac{2}{3}\arctan(y)\Big|_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{\pi}{9} \textit{(0.5 pts)}$$

(ii) $\int_1^3 \ln(x+\sqrt{x^2-1})dx$

Solución: Utilizamos integración por partes con $u = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ y $dv = dx$, para obtener

$$\int_1^3 \ln(x+\sqrt{x^2-1})dx = \ln(x+\sqrt{x^2-1})x\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} \textit{(0.5 pts)}$$

En la última integral se resuelve con el cambio de variables $y = x^2-1$ y se obtiene

$$\int_1^3 \ln(x+\sqrt{x^2-1})dx = \ln(x+\sqrt{x^2-1})x - \sqrt{x^2-1}\Big|_1^3 = 3\ln(3+2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}. \textit{(0.5 pts)}$$

(c) *(2.0 pts)* Usando sumas de Riemann, calcular los siguientes límites:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Solución: Sea $x_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Tomando logaritmo, tenemos que

$$\begin{aligned}
\ln(x_n) &= \frac{1}{n}\left(\ln((2n)!) - \ln(n!n^n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\ln\left(n!(n+1)(n+2)\cdots(2n)\right) - n\ln(n) - \ln(n!)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots + \ln(2n) - n\ln(n)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right). \quad \textit{(1 punto)} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Note que (4) corresponde a la suma de Riemann de la función $f(x) = \ln(x+1)$ con respecto a una partición equiespaciada del intervalo $[0,1]$, cuyos nodos están dados por $t_k = \frac{k}{n}$, con $k = 0, 1, \cdots, n$ (0,25 *puntos*). De (4) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x)dx \\
&= x\ln(x+1)\Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = 2\ln(2) - 1 \quad (0{,}5 \textit{ puntos}), \qquad (5)
\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad se obtuvo aplicando integración por partes. Finalmente, ocupando la continuidad de la función exponencial, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e^{\lim_{n\to\infty}\ln(x_n)} = e^{2\ln(2)-1} = 4e^{-1}. \quad (0{,}25 \textit{ puntos})$$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{2k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Solución: Sea $x_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{2k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\ln(x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2k}{n}\right). \tag{6}$$

Note que (6) corresponde a la suma de Riemann de la función $\ln(1+2x)$ con respecto a la partición equiespaciada del intervalo $[0,1]$, cuyos nodos están dados por $t_k = \frac{k}{n}$, con $k = 0, \cdots, n$ (0,5 *puntos*). Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2k}{n}\right) \\
&= \int_0^1 \ln(1+2x)dx \\
&= \frac{(2x+1)}{2}\left(\ln(1+2x)-1\right)\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1, \quad (0{,}5 \textit{ puntos})
\end{aligned} \tag{7}$$

donde la tercera igualdad se obtuvo aplicando integración por partes. Finalmente, ocupando la continuidad de la función exponencial, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e^{\lim_{n\to\infty}\ln(x_n)} = e^{\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)-1} = \frac{3\sqrt{6}}{4}e^{-1}. \quad (1 \textit{ punto})$$

P4. (*6.0 pts*) Sea $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida mediante $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}dt$. Estudie los extremos relativos y absolutos de F, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y calcule $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

Solución: Note que

$$F'(x) = e^{-x^2}(2e^{-3x^2}-1), \quad x \geq 0. \quad (0{,}5 \textit{ puntos})$$

Luego, los puntos críticos de F representan las soluciones de la ecuación $F'(x) = 0$. Así,

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(2e^{-3x^2}-1) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}. \quad (0{,}5 \textit{ puntos})$$

Sin embargo, el primer punto crítico no es factible, pues no pertenece al dominio de F, por lo que el único punto crítico que interesa es $x = \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$ (0,25 *puntos*).

Vamos a clasificar los puntos críticos. Para ello, notemos primero que

$$F''(x) = 2xe^{-x^2}\left(1-8e^{-3x^2}\right). \quad (0{,}25 \textit{ puntos})$$

Además $F''\left(\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < 0$. Por el criterio de la segunda derivada, encontramos que F alcanza un máximo local en $x = \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$ (0,25 *puntos*). Por otra parte, como $F(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,\infty)$ (pues se define en términos de la integral de una función positiva) y como $F(0) = 0$, entonces se tiene que F alcanza su mínimo absoluto en $x = 0$ (0,5 *puntos*).

Note además que

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(2e^{-3x^2}-1) > 0 \Leftrightarrow 2e^{-3x^2}-1 > 0 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}. \quad (0{,}25 \textit{ puntos})$$

Por lo tanto F es creciente en $\left(0, \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right)$ (0,25 *puntos*).

Por otra parte,

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(2e^{-3x^2} - 1) < 0 \Leftrightarrow 2e^{-3x^2} - 1 < 0 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}, \quad (0{,}25\ puntos)$$

por lo que F es decreciente en $\left(\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}, \infty\right)$ (0,25 *puntos*).

Determinemos ahora los intervalos de concavidad y convexidad. Para ello, determinemos primero los puntos de inflexión de F. En este caso, $x \in [0, +\infty)$ es punto de inflexión si $F''(x) = 0$. Entonces

$$F''(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{-x^2}\left(1 - 8e^{-3x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - 8e^{-3x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\ln(2) \lor x = \ln(2), (0{,}25\ puntos)$$

con lo que solo consideraremos $x = \ln(2)$. Luego

$$F''(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2xe^{-x^2}\left(1 - 8e^{-3x^2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - 8e^{-3x^2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (0, \ln(2)) \quad (0{,}25\ puntos)$$

y además

$$F''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2xe^{-x^2}\left(1 - 8e^{-3x^2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 8e^{-3x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (\ln(2), +\infty).(0{,}25\ puntos)$$

Luego, F es cóncava en $(0, \ln(2))$ y convexa en $(\ln(2), +\infty)$ (0,5 *puntos*).

Finalmente, estudiaremos el comportamiento asintótico de F. Note que

$$0 \leq F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{2x} e^{-x^2} = xe^{-x^2}. \quad (0{,}5\ puntos)$$

Además, por la regla de L'Hopital se tiene que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{-x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{-2xe^{-x^2}} = 0$ (0,25 *puntos*). Luego,

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \leq \int_x^{2x} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} = 0. \quad (0{,}5\ puntos)$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$, (0,25 *puntos*).

P5. (*6.0 pts*) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $C^1(\mathbb{R})$ y dos veces diferenciable en 0, con $g(0) = 0$. Considere función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(t)}{t} dt & ; \quad x \neq 0 \\ g'(0) & ; \quad x = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}$. ¿Es f de clase $C^1(\mathbb{R})$?

<u>Solución</u>: Notemos primero que la función $\frac{g(t)}{t}$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y además

$$\lim_{t\to0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = g'(0). \quad (0{,}5\ puntos)$$

Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{g(t)}{t} & ; \quad t \neq 0 \\ g'(0) & ; \quad x = 0. \end{cases} \tag{9}$$

h es una función continua en $\mathbb{R}$ y además $\displaystyle\int_0^x h(t)dt = \int_0^x \frac{g(t)}{t}dt$ (0,5 *puntos*). Luego aplicando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de h, encontramos que

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x \frac{g(t)}{t}dt\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^x h(t)dt\right] = h(x) = \frac{g(x)}{x}, \quad x \neq 0 \quad (0{,}5\ puntos). \tag{10}$$

Para $x \neq 0$, por álgebra de derivadas y por (10) encontramos que

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{g(t)}{t}dt + \frac{g(x)}{x^2} = \frac{g(x) - \int_0^x \frac{g(t)}{t}dt}{x^2}. \quad (0{,}5\ puntos) \tag{11}$$

Por otra parte, note que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(t)}{t}dt - g'(0)}{x} = \frac{\int_0^x \frac{g(t)}{t}dt - xg'(0)}{x^2}, \quad (0{,}5\ puntos)$$

de donde

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{g(t)}{t}dt - xg'(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-xg'(0)}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{4x} = \frac{1}{4}g''(0). \quad (0{,}5\ puntos) \tag{12}$$

La segunda y tercera igualdad en (12) se obtienen ocupando la regla de L'Hopital y (10), mientras que la cuarta igualdad se obtiene del hecho que g es dos veces derivable en $x = 0$. Por lo tanto, f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = \frac{1}{4}g''(0)$ (0,5 *puntos*).

Estudiemos la continuidad de f'.

Por (10) se tiene que $\displaystyle\int_0^x \frac{g(t)}{t}dt$ es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por tanto continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Luego, de la ecuación (11) y por álgebra de funciones continuas, se tiene que f' es continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (0,5 *puntos*). Resta estudiar la continuidad de f' en $x = 0$. Para ello, notemos que:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x) - \int_0^x \frac{g(t)}{t}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)}{2x^2}. \tag{13}$$

donde la segunda igualdad se obtiene ocupando la regla de L'Hopital y (10) (0,5 *puntos*). Por otra parte,

$$\frac{xg'(x)-g(x)}{2x^2} = \frac{xg'(x)-xg'(0)+xg'(0)-g(x)}{2x^2} = . \quad (0{,}5\ puntos) \tag{14}$$

Reemplazando (14) en (13), se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{2x} - \frac{g(x)-g'(0)x}{2x^2} \\
&= \frac{g''(0)}{2} - \frac{g''(0)}{4} \\
&= \frac{g''(0)}{4} = f'(0), \quad (0{,}5\ puntos)
\end{aligned} \tag{15}$$

donde la segunda igualdad en (15) se obtuvo ocupando la regla de L'Hopital y por el hecho de que g posee derivada segunda en 0. Por lo tanto f' es continua en $x = 0$, con lo que $f \in C^1(\mathbb{R})$ (0,5 *puntos*).

P6. **(a)** (*3.0 pts*) Considere la región plana $R = R_1 \cup R_2$, donde R_1 es la región limitada por las curvas $y = 6 - x^2$ e $y = 2|x| + 3$, mientras que R_2 es la región que está limitada por el eje OX y las curvas $y = 2x + 3$, $y = 6 - x^2$ y $y = -x + 7$. Calcule el área de la región R.

Solución: Como $R = R_1 \cup R_2$ y las regiones R_1 y R_2 tienen un solo punto en común, se tiene entonces que $A(R) = A(R_1) + A(R_2)$ (0,25 *puntos*). Para determinar $A(R_1)$ debemos determinar los puntos en donde se intersectan entre las curvas $y = 6 - x^2$ e $y = 2|x| + 3$

(0,25 *puntos*). Para ello debemos resolver las ecuaciones $6 - x^2 = -2x + 3$ y $6 - x^2 = 2x + 3$, que claramente tendrán como soluciones $x_1 = -1, x_2 = 3$ y $x_1' = -3, x_2' = 1$ respectivamente, de los cuales sólo corresponden tomar x_1 y x_2' (0,25 *puntos*). Luego

$$\begin{aligned}
A(R_1) &= \int_{-1}^{0} (6 - x^2) - (-2x + 3)dx + \int_{0}^{1} (6 - x^2) - (-2x + 3)dx \\
&= \int_{-1}^{0} -x^2 + 2x + 3dx + \int_{0}^{1} -x^2 - 2x + 3dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right] \Bigg|_{x=-1}^{x=0} + \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right] \Bigg|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{5}{3} + \frac{11}{3} \\
&= \frac{16}{3}. \quad (0{,}75 \textit{ puntos})
\end{aligned} \tag{16}$$

Para calcular $A(R_2)$, ocuparemos los puntos de intersección entre las curvas $y = 6 - x^2$ e $y = 2|x| + 3$ (obtenidos previamente), junto con el punto de intersección entre las curvas $y = 2x + 3$ y $y = -x + 7$, que claramente es $x = \frac{4}{3}$ (0,25 *puntos*). Luego

$$\begin{aligned}
A(R_2) &= \int_{1}^{\frac{4}{3}} (2x + 3) - (6 - x^2)dx + \int_{\frac{4}{3}}^{\sqrt{6}} (-x + 7) - (6 - x^2)dx + \int_{\sqrt{6}}^{7} -x + 7dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right] \Bigg|_{x=1}^{x=\frac{4}{3}} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right] \Bigg|_{x=\frac{4}{3}}^{x=\sqrt{6}} + \left[-\frac{x^2}{2} + 7x \right] \Bigg|_{x=\sqrt{6}}^{x=7} \\
&= 3\sqrt{6} - 4. \quad (0{,}75 \textit{ puntos})
\end{aligned} \tag{17}$$

De (16) y (17) se obtiene finalmente que

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \frac{10}{3} + 3\sqrt{6} - 4 = 3\sqrt{6} - \frac{2}{3}. \quad (0{,}5 \textit{ puntos})$$

(b) (*3.0 pts*) Encuentre el área de las regiones R_1 y R_2 que están debajo de la curva $y = \sqrt{x^2 - 4}$ y acotadas por las rectas $y = 0$, $y = x + 4$ y $y = -x + 4$.

<u>Solución:</u> Sean R_1 la región acotada por las curvas $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $y = x + 4$ y el eje OY, mientras R_2 la región acotada por las curvas $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $y = -x + 4$ y el eje OY. Note que R_1 y R_2 son regiones simétricas con respecto al eje OY, por lo que basta con encontrar el área de una de ellas, digamos, $A(R_2)$ (0,25 *puntos*) (Colocar el puntaje en caso de que calculen en el caso de que el estudiante decida calcular el área de $A(R_1)$).

Para ello, calculemos primero el punto de intersección entre las curvas $y = \sqrt{x^2 - 4}$ y $y = -x + 4$. Entonces

$$\sqrt{x^2 - 4} = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}. \quad (0{,}5 \textit{ puntos})$$

$$\begin{aligned}
A(R_2) &= \int_{2}^{\frac{5}{2}} \sqrt{x^2 - 4}dx + \int_{\frac{5}{2}}^{4} -x + 4dx \\
&= \left[\frac{x\sqrt{x^2 - 4}}{4} - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} \right| \right] \Bigg|_{x=2}^{x=\frac{5}{2}} + \left[4x - \frac{x^2}{2} \right] \Bigg|_{x=\frac{5}{2}}^{x=4} \\
&= \frac{15}{4} + \frac{3}{2} \ln(2) + \frac{9}{8} \\
&= \frac{39}{8} + \frac{3}{2} \ln(2) \quad (2 \textit{ puntos})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $A(R_1) = A(R_2) = \dfrac{39}{8} + \dfrac{3}{2} \ln(2)$ (0,25 *puntos*)