MA1002-1 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Jorge San Martín
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Guía Primitivas

15 de Septiembre de 2017

Esta guía tiene la finalidad de ayudar a resolver muchos casos de primitivas, es importante notar que no todas las primitivas se pueden resolver y que tampoco existe una regla general que sirva siempre.

Para partir recordemos la definición de una primitiva junto con algunas propiedades:

Definición: Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $Int(I)$, se llama **primitiva** de una función f sobre I si y solo si:

$$\forall x \in Int(I), F'(x) = f(x)$$

Proposición: Sean F_1 y F_2 dos primitivas de una misma función f, estas a lo más difieren en una constante. (En virtud de esta proposición se concluye que todas las primitivas de una función se determinan por una primitiva y sumarle una constante).

$$\forall x \in I, F_1 - F_2 = c \Rightarrow \int f = F + c \overset{Notación}{\iff} \int f(x)dx = F(x)$$

Propiedades:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $\int f'(x)dx = f(x) + c$
3. $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + (x)dx$
4. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

Nota personal: Considero que calcular integrales indefinidas (primitivas), requiere mucha practica y es por esto que recomiendo realizar una que otra al día, aprender a integrar bien les servira mucho en los ramos futuros y en este.

Ya con esta definición de primitiva podemos notar que algunas primitivas como: $\int e^x dx \vee \int \cos(x)dx$, son directas, pues conocemos funciones que al derivarlas nos entregen estos valores:
$\int e^x dx = e^x + C \wedge \int \cos(x)dx = \sin(x) + C$, siempre recordar la constante porque existen infinitas soluciones no solo una.

Observación: Otras integrales como: $\int e^{x^2} dx \vee \int \frac{\sin(x)}{x}dx$, no tienen primitiva conocida.

Primitivas Directas

Como ya se menciono existen casos en los que las primitivas se conocen directamente, pues corresponden a derivadas conocidas.

Ejemplos:

$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq 1$

$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$

Con el fin de juntar todos estos casos juntos con otros bastante recurrentes (ver los siguientes casos), en el apunte de cálculo se entrega la siguiente lista de primitivas conocidas:

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq 1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$
3. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
4. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
5. $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$
6. $\int \sec(x)^2dx = \tan(x) + C$
7. $\int \text{cosec}(x)^2dx = \text{-cotan}(x) + C$
8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + c$
9. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arctan}(x) + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \text{argsinh}(x) + C$
11. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1} + C$
12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|) + C$

Nota: Después de haber leido toda la guía recomiendo demostrar toda esta lista. Pueden haber otras conocidas, pero estas son las que yo considero conocidas.

Primitivas con Cambio de Variable

Para estos casos es necesario recordar el teorema del cambio de variable:

Teorema del cambio de variable: Sea $g(x) = u$:

$$\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)dx$$

En las primitivas del estilo: $F(x) = \int f(g(x))g'(x)dx$, se tiene por el teorema que:
$F(x) = \int f(u)du + C$, con $u = g(x)$.

Ejemplos:

$$\int \tan(2x)^2 \sec(2x)^2 dx$$

Usar el cambio $u = \tan(2x)$, $du = 2\sec(2x)^2 dx$

$$\int \tan(2x)^2 \sec(2x)^2 dx = \int \frac{u^2 du}{2} = \frac{u^3}{6} = \frac{tan(2x)^3}{6} + C$$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt[7]{x^6 + 11}} dx$$

Usar el cambio $u = x^6 + 11$, $du = 6x^5 dx$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt[7]{x^6 + 11}} dx = \int \frac{u^{-\frac{1}{7}} du}{6} dx = \frac{7u^{\frac{6}{7}}}{36} = \frac{7(x^6 + 11)^{\frac{6}{7}}}{36} + C$$

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln(x)^2}} dx$$

$$\int \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}} dx$$

$$\int (x - 1)\sqrt{x + 4} dx$$

$$\int \cos(x)^5 \sin(x) dx$$

Primitivas con Trucos Típicos

Existe algunos trucos que suelen usarse para ciertos tipos de primitivas, nadie sabe a quién se le ocurrió cada uno, pero son muy útiles.

Caso Logaritmo:

Las primitivas del estilo: $F(x) = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, se tiene que: $F(x) = \ln(|f(x)|) + C$, esto se tiene, pues $(\ln(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Ejemplo:

$$\int \frac{e^x + 5}{e^x + 5x} dx$$

Notar que tiene la forma $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$

$$\int \frac{e^x + 5}{e^x + 5x} dx = \int (\ln(|e^x + 5x|)' dx = \ln(|e^x + 5x|) + C$$

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{e^x x^5}{e^x x^6 + 2017e^x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\arctan(x)(x^2 + 1)}$$

Caso $a^2 + x^2$:

Para las primitivas que posean un $a^2 + x^2$, se recomienda hacer el cambio de variable $x = a\tan(u)$, con esto se tiene que: $dx = a\sec(u)^2 du$. Para muchos casos primero hay que realizar una completación de cuadrados mediante un "ni quita ni pone". En estos casos el cabio puede variar a un. $(x - b) = a\tan(u)$

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$$

Se utiliza el cambio $a\tan(u) = x$, $a\sec(u)^2 du = dx$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \int \frac{a\sec(u)^2 du}{a^2\sec(u)^2} = \int \frac{du}{a} = \frac{u}{a} = \frac{\arctan(\frac{x}{a})}{a} + C$$

Nota: También sirve usar el cambio $a\sinh(u) = x$.

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2 + x^2 + 2x}} dx$$

Caso $a^2 - x^2$:

Para las primitivas que posean un $a^2 - x^2$, se recomienda hacer el cambio de variable $x = a\sin(u)$, con esto se tiene que: $dx = a\cos(u)du$. Para muchos casos primero hay que realizar una completación de cuadrados mediante un "ni quita ni pone". En estos casos el cabio puede variar a un. $(x - b) = a\sin(u)$

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$$

Se utiliza el cambio $\sin(u) = x$, $\cos(u)du = dx$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\cos(u)du}{\sin(u)\cos(u)} = \int \operatorname{cosec}(u)du = -\ln(|\operatorname{cosec}(u) + co\tan(u)|$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = -\ln(|\operatorname{cosec}(\arcsin(x) + co\tan(\arcsin(x)|) + C$$

Nota: También sirve usar el cambio $a\cos(u) = x$.

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}dx$$

Caso $x^2 - a^2$:

Para las primitivas que posean un $x^2 - a^2$, se recomienda hacer el cambio de variable $x = a\sec(u)$, con esto se tiene que: $dx = a\sec(u)\tan(u)du$. También sirve usar el cambio $a\cosh(u) = x$. Para muchos casos primero hay que realizar una completación de cuadrados mediante un "ni quita ni pone". En estos casos el cabio puede variar a un. $(x - b) = a\sec(u)$

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

Se realizaran ambos cambios para notar que a veces uno facilita el trabajo:

Se utiliza el cambio $a\sec(u) = x$, $a\sec(u)\tan(u)du = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \frac{a\sec(u)\tan(u)du}{a\tan(u)} = \int \sec(u)du = \ln(|\sec(u) + \tan(u)|)$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln(|\sec(\arccos(\frac{a}{x})) + \tan(\arccos(\frac{a}{x}))|) + C$$

Se utiliza el cambio $a\cosh(u) = x$, $a\sinh(u)du = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \int \frac{a\sinh(u)du}{a\sinh(u)} = \int du = u = \text{argcosh}(\tfrac{x}{a}) + C$$

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx$$

Caso $\sin(ax)^{2k+1} \vee \cos(ax)^{2k+1}$:

Para las primitivas del estilo: $\int \sin(ax)^{2k+1}dx \vee \int \cos(ax)^{2k+1}dx$, se recomienda notar que: $\cos(bx)^{2k+1} = \cos(bx)^{2k}\cos(bx)$, esto permitirá estudiar la primitiva como una de cambio de variable.

Ejemplo:

$$\int \cos(bx)^5 dx$$

Hacer el cambio $\cos(bx)^5 = \cos(bx)^4\cos(bx)$, $u = \sin(bx)$ y $du = b\cos(bx)dx$

$$\int \cos(bx)^5 dx = \int ((1-\sin(bx)^2)^2\cos(bx)dx = \int ((1-u^2))^2\frac{du}{b}$$

$$\int \cos(bx)^5 dx = \int 1 - 2u^2 + u^4\frac{du}{b} = \frac{(u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5})}{b}$$

$$\int \cos(bx)^5 dx = \frac{\sin(bx)}{b} - \frac{2(\sin(bx))^3}{3b} + \frac{(\sin(bx))^5}{5b} + C$$

Ejercicios Propuestos:

$$\int \sin(3x)^3 dx$$

$$\int \cos(2x)^7 dx$$

Caso $\sin(ax)^{2k} \vee \cos(ax)^{2k}$**:**

Para las primitivas del estilo: $\int \sin(ax)^{2k}dx \vee \int \cos(ax)^{2k}dx$, se recomienda usar las razones trigonométricas: $\sin(ax)^{2k} = \dfrac{1-\cos(2ax)}{2} \vee \cos(ax)^{2k} = \dfrac{1+\cos(2ax)}{2}$.
Esto reducirá el grado de la función puede tener que aplicarse más de una vez junto con la linealidad de la integral y el caso de los grados impares:

Ejemplo:

$$\int \sin(ax)^4 dx$$

Hacer el cambio $\sin(ax)^2 = \dfrac{1-\cos(2ax)}{2}$

$$\int \sin(ax)^4 dx = \int \frac{(1-\cos(2ax))^2}{4}dx = \int \frac{1}{4} - \frac{\cos(2ax)}{2} + \frac{\cos(2ax)^2}{4}dx$$

Hacer el cambio $\cos(2ax)^2 = \dfrac{1+\cos(4ax)}{2}$

$$\int \sin(ax)^4 dx = \int \frac{1}{4} - \frac{\cos(2ax)}{2} + \frac{(1+\cos(4ax))}{8}dx = \int \frac{3}{8} - \frac{\cos(2ax)}{2} + \frac{\cos(4ax)}{8}dx$$

$$\int \sin(ax)^4 dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a} + C$$

Ejercicios Propuestos:

$$\int \cos(4x)^6 dx$$

$$\int \sin(3x)^2 dx$$

Primitivas de Fracciones Racionales

Caso $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$**:**

Para las funciones $\frac{P(x)}{Q(x)}$, con P y Q, polinomios, ver si se tiene que $P(x) = Q'(x) \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \ln(Q(x)) + C$. De no ser así ver si $P(x)$ tiene menor grado que $Q(x)$, si esto tampoco se cumple, mediante un "ni quita ni pone"para separar en la integral de una constante más una en que se cumpla lo anterior, luego si todavía no se tiene una integral del estilo logarítmica utilizar fracciones parciales para reducir los grados y calcular por separado las primitivas como primitivas conocidas o del estilo logaritmo. (Se asume que se dominan las fracciones parciales de no ser así se recomienda practicarlas y consultar por el foro).

Ejemplo:

$$\int \frac{4x^3 - 3x^2 + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$$

Hacer fraciones parciales

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{4x^3 - 3x^2 + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$\frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + Cx(x-1)^2 + D(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{4x^3 - 3x^2 + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$\frac{Ax^3 - Ax^2 + Ax - A + Bx^2 + B + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{4x^3 - 3x^2 + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ y $D = 2$

$$\int \frac{4x^3 - 3x^2 + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3x+2}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{4x^3 - 3x^2 + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}$$

$$\int \frac{4x^3 - 3x^2 + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \ln(|x-1|) - 2(x-1)^{-1} + \frac{3}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan(x) + C$$

Ejercicio Propuesto:

$$\int \frac{4}{(x+1)(x-1)}dx$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x+2}dx$$

Caso $R(\sin(x), \cos(x))$:

Si se tiene una función racional $R(\sin(x), \cos(x))$, solo tiene senos y cosenos, se recomienda usar el cambio $t = \tan(x/2)$, con lo cual se tiene .

Ejemplo:

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx$$

Ya que es una función racional de únicamente sin y cos, usar cambio $t = \tan(\frac{x}{2})$, $\dfrac{2dt}{1+t^2} = dx$

Calculando se obtiene que: $\sin(x) = \dfrac{2t}{t^2+1}$ y $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+2t}$$

$$\int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx = \ln(|2t+2|) = \ln(|2\tan(\frac{x}{2})+2|) + C$$

Nota: Para calcular $\sin(x)$ y $\cos(x)$ suelo dibujar un triangulo rectangulo de angulo $x/2$ de cateto opuesto u, cateto adyacente 1 e hipotenusa $\sqrt{u^2+1}$. Luego utilizo sobre este triangulo las formulas de los ángulos dobles $(\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \wedge$
$\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2)$, con $2\theta = x$.

Ejercicios Propuestos:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx$$

$$\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$$

Primitivas por Partes

Para este caso de primitivas recordemos la fórmula de integración por partes:

Fórmula de integración por partes:
Sean u y v dos funciones de x, entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \iff \int udv = uv - \int vdu$$

Para las integrales de productos de funciones conocidas o simplemente integrales que no entran en los casos anteriores se recomienda utilizar la fórmula de integral por partes.
(Para recordar la fórmula suele utilizarse la mnemotecnia '**U**n **d**ia **v**i- **u**na **v**aca-**v**estida **d**e **u**niforme')

Ejemplo:

$\int \ln(x)dx$

Usando la fómula escogeremos $u = \ln(x)$ y $dv = 1 \Rightarrow v = x$ se tiene que:
$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}dx = x\ln(x) - \int dx = x(\ln(x) - 1)$

$\int xe^{-x}dx$

Usando la fómula escogeremos $u = x$ y $dv = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$ se tiene que:
$\int xe^{-x}dx = x(-e^{-x}) - \int (e^{-x}) = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x + 1)$

Nota: Para escoger u y dv hay que fijarse en cómo reducir la integral a una conocida, por ejemplo si en el segundo caso se hubieran invertido los roles, se tendría que la integral se complicaría, pues el x pasaría a ser un $\frac{x^2}{2}$.
Para esto existe una mnemotecnia (ILATE), la cual nos dice que u escoger en este orden de prioridad. (I=Inversa trigonométrica, L=Logaritmo, A=Algebraicas, T=Trigonométricas y E=Exponencial).

Ejercicios Propuestos:

$\int f^{-1}(x)dx$, conociendo $\int f(u)du = F(u)$

$\int x\ln(|\frac{x-1}{x+1}|)dx$

Como ya mencione al inicio de la guía estas técnicas ayudaran a resolver muchas primitivas así que cualquier duda o reclamo enviar un correo a:
vicentesalinas@ing.uchile.cl

Ejercicios Propuestos:

1. $\int x^2 e^{-x} dx$
2. $\int \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{1+g(x)^2}} dx$
3. $\int \operatorname{arc\,sen}(x) dx$
4. $\int \sin(x)^{24} \cos(x) \cos(a) dx$
5. $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{1x+3-x^2}} dx$
7. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1} dx$
8. $\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx$
9. $\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx$, hacer de una forma diferente a la del caso anterior.
10. $\int \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg}(x)}{1+x^2} dx$
11. $\int \ln(1+x^2) dx$
12. $\int \frac{\pi x}{\sqrt{x^2+2017}} dx$
13. $\int e^{ax} \sin(bx) dx$
14. $\int x^2 \ln(x) dx$