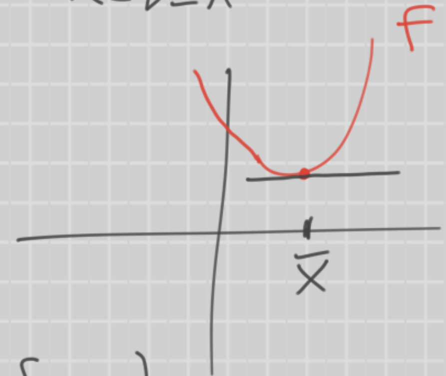
P1. Funciones y Optimización

a) **Intuición y Resumen**

- Optimización de funciones $\rightarrow$ encontrar $\bar{x}$ tq $f(\bar{x}) = \max\limits_{x \in B \subseteq A} f(x)$

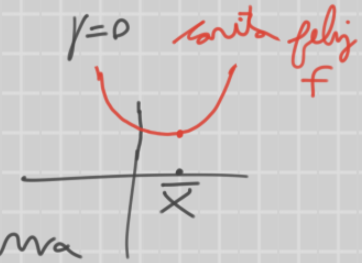
  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o $f(\bar{x}) = \min\limits_{x \in B \subseteq A} f(x)$



- Geométricamente: $f'(\bar{x}) = 0$ (Regla de Fermat)
- Problema: No se hacia dónde se mueve f
- Solución: Estudiar vecindad de $\bar{x}$ $(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$ (para $\delta > 0$) y reconocer caract. geométricas: convexidad o concavidad

P1. **Funciones y Optimización**

a) **Intuición y Resumen**



- <u>Convexidad</u>: Geométricamente función es una carita feliz
  Las rectas que unen dos pts cualesquiera de la curva quedan por encima del gráfico
  f convexa $\Longrightarrow$ $\bar{x}$ es mínimo local (por razones geométricas)
  Hay 4 formas de comprobar f convexa cerca de $\bar{x}$ (todas equivalentes):

(1) Criterio de Monotonía: f decrece antes de $\bar{x}$ y crece después de $\bar{x}$

(2) Criterio de la Derivada: $f' \leq 0$ antes de $\bar{x}$ y $f' \geq 0$ después de $\bar{x}$

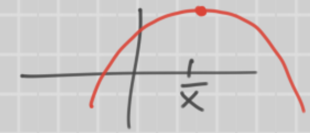
(3) f' es creciente en una vecindad de $\bar{x}$.

(4) Criterio de la 2da Derivada: $f''(\bar{x}) > 0$

Cualquiera de estas 4 condiciones garantizan que $\bar{x}$ es min local para f.

P1. **Funciones y Optimización**

a) **Intuición y Resumen**



- Concavidad: lo mismo que convexidad pero con cara triste. En este caso hay máximo local. (f cóncava $\iff -f$ es convexa)
  Las condiciones son las mismas cambiando crecimiento por decrecimiento y ≥ 0 por $\leq$.

b) **Aplicación: Distribución Normal**

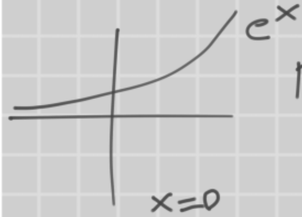
La distribución normal es un modelo teórico de estadística y probabilidad. Este describe una multitud de fenómenos como el comportamiento de la estatura, peso, puntajes de la PTU, etc, y es caracterizada por la siguiente función (llamada de densidad):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

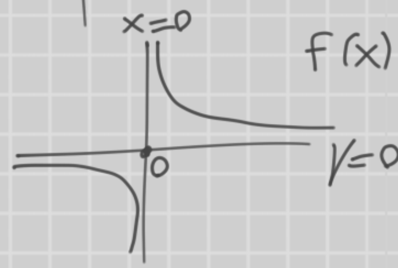
donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son denominadas la media y desviación estándar, respectivamente.

En base a esto, determine:

1) Dominio, signos y asíntotas de f.
2) Crecimiento por intervalos, además de máximos y mínimos de f, locales y globales.
3) Convexidad por intervalos, además de puntos de inflexión de f.
4) Recorrido de f y bosqueje su gráfico.



$Rec(e^x) = (0, \infty)$



$f(x) = 1/x$

1) • $Dom(f) = \mathbb{R}$

• $f > 0$ en todo $\mathbb{R}$

• Asíntotas:

Verticales: No hay pues no existen ya que $Dom(f) = \mathbb{R}$ (no hay indefiniciones)

Horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = 0.$

Oblicuas: No hay pues en ambas direcciones hay horizontales

b) **Aplicación: Distribución Normal**

La distribución normal es un modelo teórico de estadística y probabilidad. Este describe una multitud de fenómenos como el comportamiento de la estatura, peso, puntajes de la PTU, etc, y es caracterizada por la siguiente función (llamada de densidad):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son denominadas la media y desviación estándar, respectivamente.

En base a esto, determine:

1) Dominio, signos y asíntotas de f.
2) Crecimiento por intervalos, además de máximos y mínimos de f, locales y globales.
3) Convexidad por intervalos, además de puntos de inflexión de f.
4) Recorrido de f y bosqueje su gráfico.

2) Notar que f es derivable en todo $\mathbb{R}$ por álgebra y composición de funciones derivables.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot -\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{\sigma} = f(x)\left(\frac{\mu-x}{\sigma^2}\right)$$

Notar que $f'(x) = 0 \iff \left(\frac{\mu - x}{\sigma^2}\right) = 0 \iff x = \mu$

$f(x) > 0$

¿Qué pasa antes de μ? Si $x < \mu \Rightarrow f'(x) > 0$
$\Rightarrow f$ es estrict. creciente en $(-\infty, \mu)$

Si $x > \mu \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrict. decreciente en $(\mu, +\infty)$.

b) **Aplicación: Distribución Normal**

La distribución normal es un modelo teórico de estadística y probabilidad. Este describe una multitud de fenómenos como el comportamiento de la estatura, peso, puntajes de la PTU, etc, y es caracterizada por la siguiente función (llamada de densidad):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son denominadas la media y desviación estándar, respectivamente.

En base a esto, determine:

1) Dominio, signos y asíntotas de f.
2) Crecimiento por intervalos, además de máximos y mínimos de f, locales y globales.
3) Convexidad por intervalos, además de puntos de inflexión de f.
4) Recorrido de f y bosqueje su gráfico.

2) $$\left.\begin{array}{l} \text{En } (-\infty, \mu) \ f \text{ crece} \\ \text{En } (\mu, +\infty) \ f \text{ decrece} \\ f'(\mu) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mu \text{ es máximo global de } f \text{ con } f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

Este es el único pto óptimo pues μ era el único que me cumplía que $f'(\mu) = 0$.

b) **Aplicación: Distribución Normal**
La distribución normal es un modelo teórico de estadística y probabilidad. Este describe una multitud de fenómenos como el comportamiento de la estatura, peso, puntajes de la PTU, etc, y es caracterizada por la siguiente función (llamada de densidad):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son denominadas la media y desviación estándar, respectivamente.
En base a esto, determine:

1) Dominio, signos y asíntotas de f.
2) Crecimiento por intervalos, además de máximos y mínimos de f, locales y globales.
3) Convexidad por intervalos, además de puntos de inflexión de f.
4) Recorrido de f y bosqueje su gráfico.

$$f'(x) = f(x)\cdot\left(\frac{\mu - x}{\sigma^2}\right)$$

3) f es 2 veces derivable en $\mathbb{R}$ pues f' es derivable en $\mathbb{R}$ por alg. de funciones derivables

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(f(x)\left(\frac{\mu-x}{\sigma^2}\right)\right)' = f'(x)\cdot\left(\frac{\mu-x}{\sigma^2}\right) - f(x)\cdot\frac{1}{\sigma^2}$$

$$= f(x)\left(\frac{\mu-x}{\sigma^2}\right)^2 - f(x)\frac{1}{\sigma^2} = \frac{f(x)}{\sigma^4}\left((\mu-x)^2 - \sigma^2\right)$$

Notar que:

$$f''(x) = 0 \iff (\mu - x)^2 - \sigma^2 = 0 \iff |\mu - x| = \sigma$$
$$\iff \mu - x = \sigma \lor \mu - x = -\sigma$$
$$\iff x = \mu - \sigma \lor x = \mu + \sigma$$
$$\iff x \in \{\mu - \sigma, \mu + \sigma\}$$

b) **Aplicación: Distribución Normal**

La distribución normal es un modelo teórico de estadística y probabilidad. Este describe una multitud de fenómenos como el comportamiento de la estatura, peso, puntajes de la PTU, etc, y es caracterizada por la siguiente función (llamada de densidad):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son denominadas la media y desviación estándar, respectivamente.

En base a esto, determine:

1) Dominio, signos y asíntotas de f.
2) Crecimiento por intervalos, además de máximos y mínimos de f, locales y globales.
3) Convexidad por intervalos, además de puntos de inflexión de f.
4) Recorrido de f y bosqueje su gráfico.

$$f''(x) = \frac{f(x)}{\sigma^4}\left((\mu-x)^2 - \sigma^2\right)$$

3) $f''(x) = 0 \iff x \in \{\mu-\sigma, \mu+\sigma\}$ puntos de inflexión (en ellos cambia convexidad)

$\Rightarrow f''(x) > 0 \iff (\mu-x)^2 - \sigma^2 > 0 \iff |\mu - x| > \sigma$

$\iff |x-\mu| > \sigma \iff x-\mu \in (\sigma, +\infty) \vee x-\mu \in (-\infty, -\sigma)$

$\iff x \in (\mu+\sigma, +\infty) \vee x \in (-\infty, \mu-\sigma)$

$\iff x \in \underbrace{(-\infty, \mu-\sigma) \cup (\mu+\sigma, +\infty)}$

ie f es convexa ahí

y luego f es cóncava en $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$

b) **Aplicación: Distribución Normal**

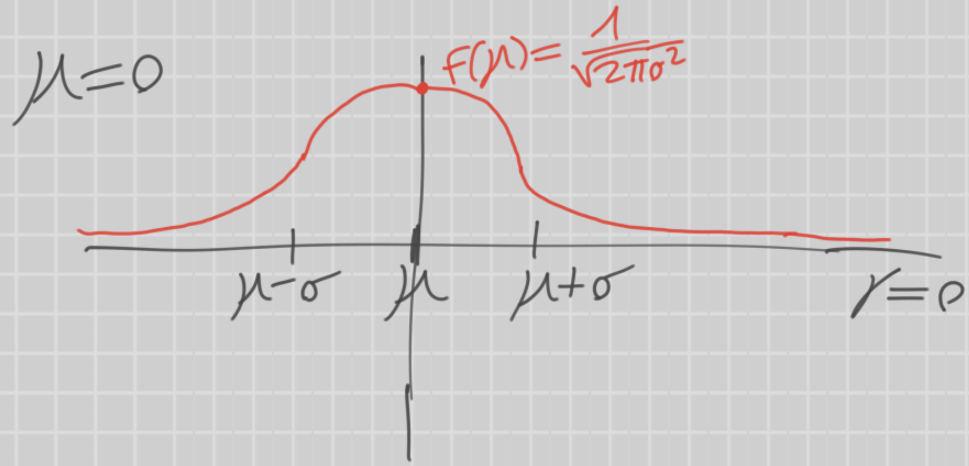
La distribución normal es un modelo teórico de estadística y probabilidad. Este describe una multitud de fenómenos como el comportamiento de la estatura, peso, puntajes de la PTU, etc, y es caracterizada por la siguiente función (llamada de densidad):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son denominadas la media y desviación estándar, respectivamente.

En base a esto, determine:

1) Dominio, signos y asíntotas de f.
2) Crecimiento por intervalos, además de máximos y mínimos de f, locales y globales.
3) Convexidad por intervalos, además de puntos de inflexión de f.
4) Recorrido de f y bosqueje su gráfico.



4) · $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $f > 0$

· $y = 0$ es AH (para $\pm\infty$)

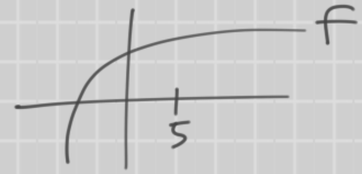
· f crece en $(-\infty, \mu)$, tiene un máximo global en $x = \mu$ con valor $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ y decrece en $(\mu, +\infty)$.

· f es convexa en $(-\infty, \mu-\sigma) \cup (\mu+\sigma, +\infty)$ con ptos de inflexión en $\{\mu-\sigma, \mu+\sigma\}$ y cóncava en $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$

· $\mathrm{Rec}(f) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right]$

P2. **Polinomios de Taylor**

a) **Intuición y Resumen**



$f \to$ Buscar $\sum_{i=0}^{n} a_i (x-x_0)^i$ (polinomio) que mejor aproxima f alrededor de un cierto pto x_0. La mejor aprox. de orden n es la sig.:

$$T^n_{f,x_0}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$n=1 \to$ aprox. lineal

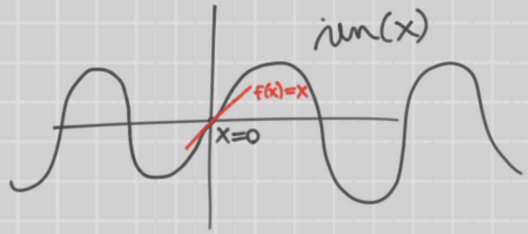
$n=2 \to$ aprox. cuadrática

$n=3 \to$ aprox. cúbica

$\vdots$

P2. Polinomios de Taylor

a) **Intuición y Resumen**



Lo fundamental es que $\exists\, o$ una función t.q.

$$f(x) = T^{n}_{f,x_0}(x) + \underbrace{o\left((x-x_0)^n\right)}_{\text{error}} \iff \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{T^{n}_{f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} + \frac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n}$$

con $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n} = \lim_{h\to 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$

El error puede calcularse (TVM) y de hecho $\forall x > x_0$, $\exists \xi \in (x_0, x)$ t.q.

$$f(x) = T^{n}_{f,x_0}(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\to \text{ error de aprox.}}$$

b) **Aplicación: Error de Aproximación**
Demuestre que, al aproximar $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ por su polinomio de Taylor de orden 1 en torno a $x_0 = 1$ en el intervalo $(1, e]$, el error asociado no supera a $(e-1)^2$.

La aprox. de f de orden 1 en torno a $x_0 = 1$ para $x \in (1, e]$:

$$f(x) = T^1_{f,1}(x) + \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x-1)^2, \quad \xi \in (1, x)$$

$$= \sum_{i=0}^{1} \frac{f^{(i)}(1)}{i!}(x-1)^i + \frac{f''(\xi)(x-1)^2}{2}$$

$$= f(1) + f'(1)(x-1) + \underbrace{f''(\xi)\frac{(x-1)^2}{2}}_{\text{error}}$$

b) **Aplicación: Error de Aproximación**
Demuestre que, al aproximar $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ por su polinomio de Taylor de orden 1 en torno a $x_0 = 1$ en el intervalo $[1, e]$, el error asociado no supera a $(e-1)^2$.

$(x \in (1, e])$

Estudiemos el error asoc. a la aprox.: $f''(\xi)\dfrac{(x-1)^2}{2}$, $\xi \in (1, x)$

Notar que

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^{1/2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^{1/2} - \ln(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = x^{-3/2} - \frac{\ln(x)}{2}x^{-3/2}$$

$$= x^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\ln(x)\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{3}{2}x^{-5/2}\left(1 - \frac{1}{2}\ln(x)\right) - \frac{1}{2}x^{-5/2}$$

$$= \frac{-3 + 3/2\ln(x) - 1}{2x^{5/2}} = -\frac{4 + 3/2\ln(x)}{2x^{5/2}}$$

b) **Aplicación: Error de Aproximación**

Demuestre que, al aproximar $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ por su polinomio de Taylor de orden 1 en torno a $x_0 = 1$ en el intervalo $[1, e]$, el error asociado no supera a $(e-1)^2$.

$\xi \in (1, x)$, $x \in (1, e]$

$(1 < \xi < x)$ $(1 < x \leq e)$

$$\Rightarrow \left| f''(\xi) \frac{(x-1)^2}{2} \right| = \left| \frac{-4 + 3/2 \ln(\xi)}{2 \xi^{5/2}} \right| \cdot \left| \frac{(x-1)^2}{2} \right|$$

$$= \frac{4 - 3/2 \ln(\xi)}{2\xi^{5/2}} \cdot \frac{(x-1)^2}{2} \leq \frac{4 - 3/2 \cancel{\ln(1)}^{\,0}}{2\xi^{5/2}} \cdot \frac{(x-1)^2}{2}$$

$\xi < x \leq e \Rightarrow \xi \leq e \Rightarrow \ln(\xi) \leq \ln(e) = 1$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \ln(\xi) \leq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow -4 + \frac{3}{2} \ln(\xi) \leq -4 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \leq 0$

$\xi > 1 \Rightarrow \ln(\xi) > \ln(1)$

$\Rightarrow -\ln(\xi) < -\ln(1)$

b) **Aplicación: Error de Aproximación**

Demuestre que, al aproximar $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ por su polinomio de Taylor de orden 1 en torno a $x_0 = 1$ en el intervalo $[1, e]$, el error asociado no supera a $(e-1)^2$.

$$\left| f''(\xi)\,\frac{(x-1)^2}{2} \right| \le \frac{1}{\xi^{5/2}} \cdot (x-1)^2 \le (x-1)^2$$

$$\xi > 1 \Rightarrow \frac{1}{\xi} < 1 \xRightarrow{(\cdot)^{5/2}} \frac{1}{\xi^{5/2}} < 1$$

$$\le (e-1)^2$$

$$x \le e \Rightarrow x - 1 \le e - 1 \underset{x>1}{\Rightarrow} (x-1)^2 \le (e-1)^2$$

$\therefore$ el error asociado no supera a $(e-1)^2$.