MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral, Primavera 2021
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar 7: Primitivas y Métodos de Integración

P1. Intuición y Resumen

Recuerdo:

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $int(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si

$$\forall x \in int(I), \quad F'(x) = f(x)$$

  Si F es una primitiva de f, entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$

- Es muy importante notar lo siguiente
  - $\int f'(x)dx = f(x) + c$
  - $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$
  - $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
  - $\int(\lambda f) = \lambda(\int f)$

- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x, entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

  o, equivalentemente $\int uv' = uv - \int u'v$

  o, de manera compacta $\int udv = uv - \int vdu$

- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables
  - para $a^2 + x^2$, usar $x = atan(v)$ o $x = asenh(v)$
  - para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(t)$ o $x = acos(t)$
  - para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o $x = acosh(v)$

  obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t

- **[Fracciones parciales]**: si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $gr(Q) > gr(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.

- **[Integrales Trigonométricas]**: Sea $R(cos(x), sen(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $sen(x)$ y $cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = tan(x/2)$.

Primitivas conocidas:

a) $\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

c) $\displaystyle\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$

d) $\displaystyle\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$

e) $\displaystyle\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$

g) $\displaystyle\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sqrt{1-x^2} + C$

h) $\displaystyle\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$

i) $\displaystyle\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$

j) $\displaystyle\int \sec^2(x) \, dx = \tan(x) + C$

k) $\displaystyle\int \mathrm{cosec}^2(x) \, dx = \mathrm{cotg}(x) + C$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

P2. Cambio de Variable

a) $\displaystyle\int \frac{e^{3\theta}}{1+e^{2\theta}} d\theta$

b) 1) $\displaystyle\int cos^5(x) dx$

2) $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x+4} dx$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x - x^{\frac{3}{5}}}$

4) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx$

P3. Integración por Partes

a) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$

b) $\displaystyle\int cos(ln(x)) dx$

P4. Fracciones Parciales

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)} dx$

b) 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$

2) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

P5. Sustitución Trigonométrica

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$

b) 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

P6. Integral Trigonométrica

a) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx$

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2021, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez y Javier Sántidrián
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar XX: Su pancito?blanco o integral?

27 Septiembre[Las dudas deben ser dichas en paya] 2019

Recuerdo:

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $int(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si

$$\forall x \in int(I), \quad F'(x) = f(x)$$

Si F es una primitiva de f, entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$

- Es muy importante notar lo siguiente
  - $\int f'(x)dx = f(x) + c$
  - $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$
  - $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
  - $\int(\lambda f) = \lambda(\int f)$

- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x, entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

o, equivalentemente $\int uv' = uv - \int u'v$

o, de manera compacta $\int udv = uv - \int vdu$

- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables
  - para $a^2 + x^2$, usar $x = atan(v)$ o $x = asenh(v)$
  - para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(t)$ o $x = acos(t)$
  - para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o $x = acosh(v)$

  obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t

- **[Fracciones parciales]**: si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $gr(Q) > gr(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.

- Sea $R(cos(x), sen(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $sen(x)$ y $cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = tan(x/2)$.

P1. Calcule primitivas:

a) $\int cos^5(x)dx$

b) $\int (x-1)\sqrt{x+4}dx$

c) $\int \frac{dx}{x - x^{\frac{3}{5}}}$

d) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}dx$

e) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

a) Intuición:

a) Para este tipo de ejercicios primero notaremos que existen una serie de ejercicios de diferentes tipos, por lo que habrá que saber que hacer en cada caso.
Siempre que tenga algo del tipo $cos(x)^n$ $n \in \mathbb{N}; n > 2$ ó $sen(x)^n$ $n \in \mathbb{N}$ lo que primero debemos pensar es en ver como poder escribir esto de manera conveniente para que sea más fácil poder integrarlo, en su defecto ocupar la propiedad pitagórica fundamental del $sen(x) \wedge cos(x) \to cos(x)^2 + sen(x)^2 = 1$ de manera conveniente.
Luego notar que mediante un cambio de variable de la forma $u = sen(x)$ o similar se puede pasar de estas expresiones trigonométricas a polinomios, lo cual es mucho más práctico.
¿Qué ocurre con el dx o du que queda? siempre debo considerarlo y debe ser conveniente que mi cambio de variable lo tenga contemplado y así no debo ir añadiendo términos adicionales.
Estudiar de manera adicional como integrar $\int cos(x)^5 sin(x)dx$ vemos que el dx con el cambio de variable anteriormente mencionado es directo!

b) Lo que hay que pensar aquí es el cambio para poder eliminar esa traslación de la raíz, que es la que más me molesta!

c) Ver la forma de eliminar la $\sqrt[5]{x}$ entonces un cambio con una potencia 5 sería una buena forma de abarcarlo. Luego de esto sería conveniente que mi derivada esté en el numerador y su primitiva en el denominador eh?

d) simplificar es la mejor idea, luego de esto ver en realidad que cambio me sirve, pues su coloco un cambio con exponentes $3x$ tendré que tener exponentes feos para expresar e^{2x}, por lo que, cual será conveniente?

e) Suma de cuadrados en el denominador! el apunte lo recomienda en el capítulo 5[Página 62]! lo usual será pensar en $x = a\tan(u) \vee x = a\sinh(u)$

f) Cuadrado de binomio puede ser una muy buen intuición o completación de cuadrado para cuando me salga un polinomio de grado par no factorizable a la primera!
Además luego deshacerse de su traslación en el eje $\mathcal{X}$ con algo del estilo de $x + 1 = u$

b) Teoría: La teoría detrás de este tipo de ejercicios es lo esencial de primitivas, que si se tienen dos primitivas de una función, difieren en una constante, la cual por cada integral indefinida me entrega una!
Está bien definido el cambio de variable, pues si! es un cambio biyectivo que permite calcular integrales elaboradas convirtiendo el desarrollo en general a las ya demostradas.

c) Matraca: Hay que darle mucho para adelante, uno se demora en poder interiorizar en un comienzo el que cambios hacer, y los desarrollos se vuelven algo extensos, pero en su defecto a medida que la matraca aumente esto irá mejorando de forma paulatina! Darle para adelante porque el álgebra acá y escribir las cosas de manera conveniente será fundamental.

P2. Resuelva usando integración por partes

a) $\int x^2 e^x dx$ *b)* $\int cos(ln(x))dx$

a) Intuición: La intuición de este tipo de ejercicios es que debemos identificar que tenemos la integral de dos tipos de funciones diferentes multiplicadas, las que se pueden resumir en lo siguiente.

$$\{e^x,\ senh(x)/cosh(x),\ sen(x)/cos(x)\ ,\ ax^n + bx^{n-1} + \ldots + zx^2 + zx\ ,\ ln(x)\ , arccos(x)/arcsen\}$$

Que se resume de la siguiente manera nemotécnica con ILATHE.(ojo que está al revés con cada inicio de palabra [exponenciales, hiperbólicas, trigonométricas, algebraicas, logaritmo e inversas trigonométricas])

Pero antes de aprenderse cosas por mecánica es pensar ¿Cuál es más fácil paras derivar? Esta se define como u y se calcula du.
¿Cuál es más fácil para integrar? Esta se define como dv y se calcula v.
Luego para la b) tenemos un logaritmo, de que manera lo puedo eliminar? su inversa en el cambio de variable puede ser una buena idea! y al derivar $u = e^x$ me da lo mismo ajajajaj Spiderman? ahora es un producto de funciones iguales o diferentes? La intuición era eliminar el logaritmo dentro de la composición.

b) Teoría: La teoría a través de este ejercicio es que con secuencia de integrar productos es consecuencia de la derivada del producto y su demostración vista en clase auxiliar y el apunte.

c) Matraca: Puede que el desarrollo sea extenso, o bien salga otra vaca dentro de la vaca, y es cierto, si tengo un polinomio tendré que reiterar el proceso en el orden de ± 1 vez de acorde al grado del polinomio, es decir, si es de grado 4 puede que debo hacer el proceso de integración por parte sus 3 , 4 o 5 veces.[La cantidad de vacas necesarias para salvar la compañía].

P3. Generalización Integración por partes Este ejercicio busca que busquemos un método de hacer integración por partes, pero sin importar la cantidad de veces que deba iterar el proceso. En este caso ¿Cómo puedo escribirlo? (Propuesto)

a) Intuición: Querer generalizar la integración por parte en un método que sea más práctico!

b) Teoría: Mientras la función esté bien definida podré hacer la cantidad de vacas necesarias para poder calcular la integral!

c) Matraca: Hacer varias y ver como se comporta, siempre pensar en ordenarlo de manera que se parezca y sacar un patrón.

P4. Resuelva usando fracciones parciales

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

a) Intuición: En este tipo de ejercicios lo primero es ver que nos entregarán fracciones a integrar que serán en cierto sentido factorizables con algo de forma minimal, por lo que el saber armar fracciones parciales es esencial, si tienen dudas el apunte lo explica de manera buena. De lo contrario ver esto

Como podrás ver, en general, para integrar una función de la forma:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\, dx = \int \frac{P_n(x)}{(a_1\, x + b_1)(a_2 x + b_2)\cdots(a_m x + b_m)}\, dx$$

donde $Q_m(x)$ es un polinomio de grado m que es factorizable en m factores lineales que no se repiten, buscamos números $A_1, A_2, \cdots, A_m$ tales que:

$$\frac{P_n(x)}{(a_1\, x + b_1)(a_2 x + b_2)\cdots(a_m x + b_m)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \cdots + \frac{A_m}{a_m x + b_m}$$

Para el caso en que uno o varios de los factores se repitan usamos un término para cada uno de los factores con exponentes $1, 2, \cdots, k$, donde k es el número de veces que se repite el factor que estamos considerando. Por ejemplo, para expresar:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_3}{(x+2)^3}$$

En este caso $k = 3$, por eso usamos 3 términos para expresar en fracciones parciales. Este mismo argumento aplica a los denominadores que se factorizan con polinomios cuadráticos. Cuando un denominador es cuadrático, en el numerador escribiremos: $A\, x + B$. Por ejemplo:

$$\frac{2\, x + 1}{(x-7)(x^2+11)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B\, x + C}{x^2 + 11}$$

Observa que el grado del polinomio que escribimos en el numerador siempre es menor al grado del denominador en una fracción. Para el caso de factores cuadráticos repetidos, tenemos:

$$\frac{2\, x + 1}{(x-7)(x^2+11)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B_1\, x + C_1}{x^2 + 11} + \frac{B_2\, x + C_2}{(x^2+11)^2}$$

Con estos trucos, puedes calcular muchas integrales usando este método.

Figura 1: Parciales como en sumatorias telescópicas

b) Teoría: Es que este cambio es equivalente, por lo que la suma integral a calcular será la pedida, recordar que la integral es transformación lineal(saca escalares y además separa la suma).
Por lo general hace más abordable el ejercicio.

c) Matraca: Darle para adelante pues quedan corchos grandes, pero no imposibles, así que matraquear y apurarla acá es primordial.

P5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ derivable y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tales que

$$f'(x) + g(x)f(x) = 0$$

Usando definición de primitiva muestre que

$$\int g(x)dx = -\ln f(x) + C$$

a) Intuición: Primero me piden demostrar algo con un $ln(x)$ recordemos la definición de primitiva, y además cual la derivada de esta, y su integral, será esta función la que estoy trabajando? Eso es en un comienzo.
Me dan una igualdad, me puede ser conveniente el matraquearla y llegar a lo pedido.

b) Teoría: Las funciones deben estar bien definidas, no se debe anular una en particular, y deben ser integrables y derivables respectivamente.

c) Matraca: Ordenar lo que me dan sin matar gatitos, en realidad no es mucha.

P6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ derivable y tal que $\displaystyle\int f(x)dx = f(x)$

a) Muestre que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = 1$ y deduzca que $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = x + C$

b) Concluya que $f(x) = e^{x+C}$

a) Intuición:¿Quien es Spiderman?¿Dos primitivas de la misma función en que difieren? ¿Cuál es la definición de primitiva?

b) Teoría: Para que una primitiva esté bien definida existen hipótesis que debo cumplir, ver bien donde llega la función $f(x)$, pues si es negativa o nula que ocurre?

c) Matraca: Ordenar las hipótesis, esto es más que nada teoría antes que matraca!

Primitivas conocidas:

1. $\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall\alpha \neq -1$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\displaystyle\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$
4. $\displaystyle\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$
5. $\displaystyle\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
7. $\displaystyle\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sqrt{1-x^2} + C$
8. $\displaystyle\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$
9. $\displaystyle\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$
10. $\displaystyle\int \sec^2(x) \, dx = \tan(x) + C$
11. $\displaystyle\int \mathrm{cosec}^2(x) \, dx = \mathrm{cotg}(x) + C$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

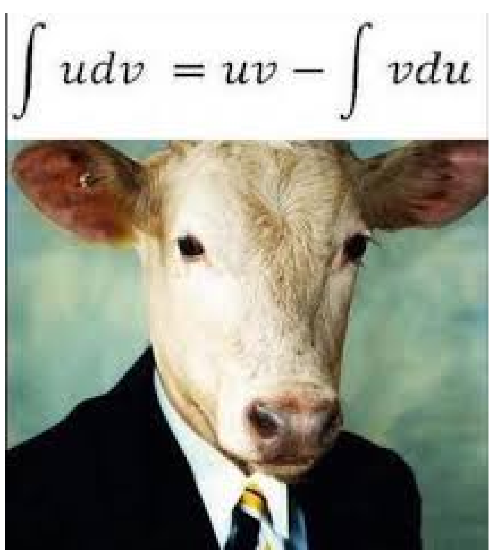

Figura 2: Un día vi una vaca sin cola vestida de uniforme.

1) $\int \cos^5(x)\, dx$

$= \int \cos^4(x) \cos(x)\, dx$

$= \int (1 - \sin^2(x))^2 \underbrace{\cos(x)\, dx}_{du}$

u

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \quad /(\ )^2$

$\cos^4(x) = (1 - \sin^2(x))^2$

C.V $\quad u = \sin(x)$

$du = \cos(x)\, dx$

$= \int (1 - u^2)^2\, du$

$= \int (1 - 2u^2 - u^4)\, du$

Linealidad

$= \int 1\, du + \int -2u^2\, du + \int -u^4\, du$

$= \int 1\, du - 2\int u^2\, du - \int u^4\, du$

$\left(\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$

$= u + c_1 - 2\frac{u^3}{3} + c_2 - \frac{u^5}{5} + c_3, \quad C := c_1 + c_2 + c_3 \in \mathbb{R}$

$u = \sin(x)$

$du = \cos(x)\, dx$

Vuelta

$= \sin(x) - \frac{2\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + C$

Extra extra.

$$\int \cos^5(x)\,dx \qquad \text{estudiamos } I = \int \cos^5(x)\sin(x)\,dx$$

$$f^5(x)\, f'(x)$$

$$I = -\int \underbrace{\cos^5(x)}_{u^5}\underbrace{(-\sin(x))\,dx}_{du} \quad / \quad u = \cos(x), \quad du = -\sin(x)\,dx$$

$$= -\int u^5\,du = -\frac{u^6}{6} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{\cos(x)^6}{6} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \quad //$$

b) $\int (x-1)\sqrt{x+4}\,dx$, $\quad u = x+4$

$\Rightarrow x-1 = u-5$

$\Rightarrow du = dx$

$$= \int (u-5)\sqrt{u}\,du$$

$$= \int (u-5)\,u^{\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= \int \left(u^{\frac{3}{2}} - 5u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \int u^{\frac{3}{2}}\,du - 5\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5/2} + C_1 - 5\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\#\ u = x+4$

$$= \frac{2(x+4)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{10(x+4)^{\frac{3}{2}}}{3} + C, \quad C := C_1 + C_2 \in \mathbb{R}$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x - x^{3/5}}\,dx$

$u^5 = x$

$5u^4\,du = dx$

$$= \int \frac{1}{u^5 - u^3}\cdot 5u^4\,du \qquad (u^5)^{3/5} = u^3$$

$$= 5\int \frac{\cancel{u^3}\cdot u\,du}{\cancel{u^3}(u^2-1)}$$

$$= 5\int \frac{u}{u^2-1}\,du \qquad 2 \text{ Caminos}$$

$t = u^2 - 1$

$dt = 2u\,du$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{1}{t}\,dt \qquad , \ (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{5}{2}\ln|t| + C \quad , \ C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{5}{2}\ln(|u^2-1|) + C \quad , \ x = u^5, \ x^{\frac{2}{5}} = u^2$$

$$= \frac{5}{2}\ln(|x^{\frac{2}{5}} - 1|) + C \ //$$

Forma 2)

$$5\int \frac{u}{u^2-1}\,du = \frac{2}{2}\cdot 5\int \frac{u}{u^2-1}\,du = \frac{5}{2}\int \frac{2u\,du}{u^2-1}$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{2}(\ln(|f(x)|))$$

$$= \frac{5}{2}(\ln|u^2-1|) + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{5}{2}\ln|(x^{\frac{5}{2}} - 1|) + C \ //$$

ILATE → Hiperbólica, procracal
↓ ↳ ↳ ↳ trego
inversa log algebraica

Un Día Vi Una Vaca sin Cola vestida uniforme

$$u\,dv = uv - \int v\,du$$

$u =$ ○ → du → el que se pueda derivar

$dv =$ ○ → v → el que se pueda integrar

$$\int x^2 e^x\,dx =$$

$u = x^2$, $du = 2x\,du$ | $dv = e^x\,dx$, $v = e^x$

$$I = \int \cos(\ln(x))\,dx \qquad \text{C.V} \quad x = e^y \Rightarrow \ln(x) = y$$
$$dx = e^y\,dy$$

$$I = \int \cos(\ln(e^y))\,e^y\,dy$$

$$I = \int \underset{u}{\cos(y)}\cdot \underset{dv}{e^y\,dy}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$u = \cos(y)$ ⇒ $du = -\sin(y)\,dy$ | $dv = e^y\,dy$ ⇒ $v = e^y$

$u' = \sin(y)$, $du' = \cos(y)\,dy$ | $dv' = e^y\,dy$, $v' = e^y$

$$I = \cos(y)\,e^y + \int e^y\cdot\sin(y)\,dy$$

$$I = \cos(y)\,e^y + \sin(y)\,e^y - \underbrace{\int e^y\cos(y)\,dy}$$

$$I = \frac{\cos(y)\,e^y + \sin(y)\,e^y}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow I = \frac{\cos(\ln(x))\,x + \sin(\ln(x))\,x}{2} + C$$

d) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}\cdot e^{x}}{1+e^{2x}}\,dx$ $\qquad e^{x} = u$

$/ e^{x}dx = du$

$$= \int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,du$$

$$= \int \left(\frac{u^2+1}{u^2+1} - \frac{1}{u^2+1} \right) du$$

$$= \int du - \int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= u + C_1 - \operatorname{arctg}(u) + C_2 \quad , C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$u = e^{x}$

$$= e^{x} - \operatorname{arctg}(e^{x}) + C \quad // \qquad C := C_1 + C_2$$

Sorpresa en f min

$$\int \frac{1\,dx}{1-x^2} = \int \boxed{\frac{1}{(1-x)(1+x)}}\,dx$$

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)} = \boxed{\frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}} = \frac{A(1-x)+B(1+x)}{(1+x)(1-x)}$$

$$= \frac{x(B-A)+A+B)}{1-x^2}$$

$$B-A = \Rightarrow B = A$$
$$A+B = 1 \quad B = \tfrac{1}{2},\ A = \tfrac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\right) dx$$

linealidad

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - \ln(|1-x|) + C_1 + \frac{1}{2}\ln(|1+x|) + C_2$$

$$C := C_1 + C_2 \in \mathbb{R}$$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$

Recuerdo fracciones parciales y sumatorias
$\underbrace{\text{parciales}}_{\text{integra}}$ y $\underbrace{\text{Taylor}}_{\text{Riemann}}$

integración por parte

Polinomios, log, e^x, trigonométricas, hiperbólicas, inversas trigonométricas

$$v\,dv = uv - \int v\,du$$

ILATHE

$u = \bigcirc \Rightarrow du$ $\qquad dv = \bigcirc \Rightarrow v$

$$I = \int \cos(\ln(x))\,dx \qquad \Big|\ e^y = x,\ e^y dy = dx$$

$$I = \int \cos(\ln(e^y))\,e^y\,dy$$

$$I = \int \cos(y)\cdot e^y\,dy$$

$u = \cos(y)$ $\qquad dv = e^y\,dy$

$du = -\sin(y)\,dy$ $\qquad v = e^y$

$$u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \int \cos(y)\,e^y\,dy = \cos(y)\,e^y + \int e^y \sin(y)\,dy$$

$u' = \sin(y)$

$du' = \cos(y)\,dy$

$dv' = e^y\,dy$

$v' = e^y$

$$I = \cos(y)e^y + \sin(y)e^y - \int e^y \cos(y)\,dy$$

$$I = \cos(y)e^y + \sin(y)e^y - I$$

$$I = \frac{\cos(y)e^y + \sin(y)e^y}{2} + C,\ C \in \mathbb{R} \qquad \Big|\ x = e^y,\ \ln(x) = y$$

$$I = \frac{\cos(\ln(x))\cdot x + \sin(\ln(x))\,x}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} \quad , \quad x = a\tan(u), \quad dx = a\sec^2(u)\,du$$

$$= \int \frac{a\sec^2(u)\,du}{(a^2 + a^2 tg^2(u))^2} = \int \frac{\cancel{a}\sec^2(u)\,du}{a^{\cancel{4}3}(1+tg^2(u))^2}$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{\sec^2(u)\,du}{\sec^4(u)}$$

$1 + tg^2(x) = \sec^2(x)$

$\cos^2 + \sin^2 = 1 \quad / \frac{1}{\cos^2}$

$1 + \underbrace{\frac{\sin^2}{\cos^2}}_{tg^2} = \underbrace{\frac{1}{\cos^2}}_{\sec^2}$

$1 + tg^2 = \sec^2$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{du}{\sec^2(u)}$$

$$= \frac{1}{a^3}\int \cos^2(u)\,du$$

\# $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$\Rightarrow \cos(2x) = \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x)$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$\frac{\cos(2x)+1}{2} = \cos^2(x)$

$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{\cos(2u)+1}{2}\,du$$

$$= \frac{1}{a^3}\left(\int \frac{\cos(2u)}{2}du + \int \frac{1}{2}du\right)$$

$$= \frac{1}{a^3}\left[\frac{\sin(2u)}{2} + u + c\right], \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{a^3}\left[\frac{\sin(\operatorname{arctg}(\frac{x}{a}))}{2} + \operatorname{arctg}(\tfrac{x}{a}) + c\right] //$$

$x = a\,tg(u)$

$\operatorname{arctg}(\frac{x}{a}) = u$

\# $x = a\sinh(u)$ C.V

$$\bullet \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} ,$$

C.V $\rightarrow$ $x+1 = \sinh(u)$, $dx = \cosh(u)\,du$

$$= \int \frac{\cosh(u)\,du}{\sqrt{\sinh^2(u)+1}}$$

\# $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

\# $x+1 = u$, $u = tg(v)$

$$= \int \frac{\cancel{\cosh(u)}\,du}{\cancel{\cosh(u)}} = u + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= \operatorname{arcsinh}(x+1) + c, \quad c \in \mathbb{R} //$$

P1. Intuición y Resumen

Cálculo Diferencial: Dada f, obtener f' y sus propiedades.
Cálculo Integral: Dada f', obtener f y sus propiedades.

Operador integral $\int$

¿Qué es $\int f = \int f(x)\,dx$?

Es cualquier función derivable h (ie $\int f = h$) que cumpla $h' = f$, ie $\int h' = h$ (obs: h se dice una primitiva de f) ($\int$ es op. inversa a $'$)

Notar que $\forall C \in \mathbb{R}$, $(h+C)' = h' = f \Rightarrow \int f = h + C$, $\forall C \in \mathbb{R}$

Así, todas las primitivas de f son de la forma $h+C$, con $C \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \boxed{\int h' = h + C, \ \forall C \in \mathbb{R}}$ 1° Prop. Fundamental de primitivas.

P1. Intuición y Resumen

Recordar que $\int f = h + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int f = \frac{d}{dx}(h+C) = h' = f$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\int f\right)' = f}$$ 2° prop. fundamental de primitivas

Además: $\boxed{\int f + \lambda g = \int f + \lambda \int g, \ \forall f, g, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}}$ $\int$ es operador lineal

3° prop. fundamental de primitivas

Ejemplos:

- $(x^2)' = 2x \underset{\int}{\Rightarrow} \int 2x = 2\int x = \int (x^2)' = x^2 + C, \ C \in \mathbb{R} \Rightarrow \int x = \frac{x^2}{2} + \tilde{C}, \ \tilde{C} \in \mathbb{R}$
- $(\sin(x))' = \cos(x) \underset{\int}{\Rightarrow} \int \cos(x) = \int (\sin(x))' = \sin(x) + C, \ C \in \mathbb{R}.$

P2. Cambio de Variable

$$a) \int \frac{e^{3\theta}}{1+e^{2\theta}} d\theta$$

$$\int f(u)\,du \,,\; u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$$

$$\| $$

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$

Rec: $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{e^{3\theta}}{1+e^{2\theta}} d\theta = \int \frac{(e^{\theta})^2}{1+(e^{\theta})^2} e^{\theta} d\theta = \int \frac{u^2}{1+u^2} du = \int \frac{1+u^2-1}{1+u^2} du$$

C.V.:
$u = e^{\theta}$
$du = e^{\theta} d\theta$

$$= \int 1\,du - \int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= u - \arctan(u) + C,\; C \in \mathbb{R}$$

$$= e^{\theta} - \arctan(e^{\theta}) + C,\; C \in \mathbb{R}$$

P3. Integración por Partes

a) $\int x^2 e^x dx$

fórmula de integración por partes

$$\int f(x)g(x)dx = \underbrace{\int u\,dv}_{\text{un día vi}} = \underbrace{uv}_{\text{una vaca}} - \underbrace{\int v}_{\text{sin cola}}\,\underbrace{du}_{\text{vestida de uniforme}}$$

Reconocer

u (por ej. $= f(x)$) $\rightarrow$ $du = f'(x)dx$

y dv ($= g(x)dx$) $\rightarrow$ $v = \int g(x)dx$

—o—

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv}$$

$$\left(\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x\,dx & v = e^x \end{array} \right)$$

$$= uv - \int v\,du = x^2 e^x - \int 2x\, e^x dx = x^2 e^x - 2\underbrace{\int x e^x dx}_{(*)}$$

P3. Integración por Partes

a) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$

$(*)$ $\displaystyle\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv}$ $\left(\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array}\right)$

$$= uv - \int v\,du = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1).$$

$$\Longrightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2e^x(x-1) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C,\ C \in \mathbb{R} \blacksquare$$

P4. Fracciones Parciales

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}dx$

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m(x-r_1)^{\alpha_1}(x-r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_tx+c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \ldots r_s$ son las raíces de Q, de multiplicidades $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, y $\beta_1, \ldots, \beta_t$ son numeros enteros positivos, con $x^2 + b_ix + c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x-r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x-r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x-r_i)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x-r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2+b_ix+c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{x^2+b_ix+C_i} + \frac{B_{2i}x + C_{2i}}{(x^2+b_ix+c_i)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2+b_ix+c_i)^{\beta_i}}$$

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{x}{1\cdot(x-(-1))^1\cdot(x^2+0\cdot x+1)^1}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$= \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow x = Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

$$\Rightarrow (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C) = 0\cdot x^2 + 1\cdot x + 0$$

$\Rightarrow$ = de polinomi

$$\begin{cases} A+B=0 & (B=-A) & (1) \\ B+C=1 & & (2) \\ A+C=0 & (C=-A) & (3) \end{cases}$$

(1) y (3) en (2) $\Rightarrow -2A = 1 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{B = C = \frac{1}{2}}$

P4. Fracciones Parciales

$$a) \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}dx$$

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m (x-r_1)^{\alpha_1} (x-r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_tx+c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \dots r_s$ son las raíces de Q, de multiplicidades $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, y $\beta_1, \dots, \beta_t$ son numeros enteros positivos, con $x^2+b_ix+c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x-r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x-r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x-r_i)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x-r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2+b_ix+c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{x^2+b_ix+C_i} + \frac{B_{2i}x+C_{2i}}{(x^2+b_ix+c_i)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2+b_ix+c_i)^{\beta_i}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}dx = \int \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$\underset{\text{linealidad } \int}{=} \frac{1}{2}\Big[-\underbrace{\int \frac{1}{x+1}dx}_{(1)} + \underbrace{\int \frac{x}{x^2+1}dx}_{(2)} + \underbrace{\int \frac{1}{x^2+1}dx}_{(3)}\Big]$$

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x+1}dx \underset{\substack{\text{c.v.:} \\ u = x+1 \\ du = dx}}{=} \int \frac{1}{u}du = \ln|u| = \ln|x+1|$

$\boxed{\text{Rec: } (\ln|u|)' = \frac{1}{u}}$

P4. Fracciones Parciales

$$a)\ \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}dx$$

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m (x-r_1)^{\alpha_1} (x-r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_t x + c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \ldots r_s$ son las raíces de Q, de multiplicidades $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, y $\beta_1, \ldots, \beta_t$ son numeros enteros positivos, con $x^2 + b_i x + c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x-r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x-r_i)^2} + \cdots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x-r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{x^2 + b_i x + C_i} + \frac{B_{2i}x + C_{2i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + \cdots + \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}$$

(2) $$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u|$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

C.V.:
$$u = x^2+1$$
$$du = 2x\,dx$$

(3) $$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)$$

$$\therefore \int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}dx = \frac{1}{2}\left[-\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)\right] + C,\ C \in \mathbb{R}$$

P5. Sustitución Trigonométrica

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx$$

Prop 3 (Sustituciones trigonométricas). *Se recomiendan los siguientes cambios de variables*

- *para* $a^2 + x^2$, *usar* $x = atan(v)$ *o* $x = asenh(v)$
- *para* $a^2 - x^2$, *usar* $x = asen(t)$ *o* $x = acos(t)$
- *para* $x^2 - a^2$, *usar* $x = asec(v)$ *o* $x = acosh(v)$

$$\int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}dx = \int \frac{1}{(2^2-x^2)^{3/2}}dx$$

sust. trig. $2^2 - x^2$:

c.v. $x = 2\sin(t)$

$dx = 2\cos(t)\,dt$

$\frac{x}{2} = \sin(t)$

$\Rightarrow t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= \int \frac{1}{\underbrace{(4-4\sin^2(t))}_{4(1-\sin^2(t)) = 4\cos^2(t)}{}^{3/2}} 2\cos(t)\,dt = 2\int \frac{\cancel{\cos(t)}}{8\cos^{\cancel{3}\,2}(t)}dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2(t)}dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \sec^2(t)\,dt$$

Rec: $(\tan(u))' = \sec^2(u)$

$$= \frac{1}{4}\tan(t) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{4}\tan\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C,\ C \in \mathbb{R}$$

P6. Integral Trigonométrica

$$a) \int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx$$

Para funciones racionales en función de sin y cos:

C.V.: $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \boxed{dt = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot \frac{1}{2}dx}$ (1)

$\frac{x}{2} = \arctan(t) \Rightarrow x = 2\arctan(t) \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$ (2)

(1) y (2) $\Rightarrow \cancel{dt} = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\cancel{dt}}{1+t^2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+t^2}$

$1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ $//$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \wedge \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\Rightarrow \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \wedge \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

és C.V.: $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

P6. Integral Trigonométrica

$$a)\ \int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)+\cos(x)}\,dx$$

C.V. $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{\frac{4t}{1+t^2}}{1+\cancel{t^2}+2t+1-\cancel{t^2}}\,dt$$

$$= 2\int \frac{\frac{t}{1+t^2}}{t+1}\,dt = 2\int \frac{t}{(1+t^2)(t+1)}\,dt$$

$$= -\ln|t+1| + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan(t) + C,\ C\in\mathbb{R}$$

$\boxed{P4}$

$$= -\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right| + \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{x}{2} + C,\ C\in\mathbb{R}$$