MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2021, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Derivando

06 de septiembre de 2021

Recuerdo:

- Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\overline{x} \in (a, b)$, si existe el limite

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}$$

  Equivalentemente, f es derivable en $\overline{x}$ si existe $m = f'(\overline{x})$ tal que $f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + o(x - \overline{x})$

- Si f es derivable en $\overline{x}$ entonces es continua en $\overline{x}$

- [**Álgebra de derivadas**] Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces:

  1. $f \pm g$ es derivable en $\overline{x}$ con

$$(f \pm g)'(\overline{x}) = f'(x) \pm g'(x)$$

  2. $f \cdot g$ es derivable en $\overline{x}$ con

$$(f \cdot g)' = f'(\overline{x})g(\overline{x}) + f(\overline{x})g'(\overline{x})$$

  3. Si $g(\overline{x}) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en $\overline{x}$ con

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(\overline{x})g(\overline{x}) - f(\overline{x})g'(\overline{x})}{g^2(\overline{x})}$$

- [**Regla de la cadena**]
  Sean $f : (a, b) \to (c, d)$ derivable en $\overline{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c, d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}$ con

$$(g \circ f)'(\overline{x}) = g'(f(\overline{x})) \cdot f'(\overline{x})$$

  Tambien se puede usar la notación de leibniz obteniendo $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ donde $y = y(u)$ y $u = u(x)$, es decir y depende de u y u depende de x.

- [**Derivada de la función inversa**] Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\overline{x} \in (a, b)$ con $f'(\overline{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ es derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c, d)$ con

$$(f^{-1})'(\overline{y}) = \frac{1}{f'(\overline{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\overline{y}))}$$

  Analogamente $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ donde $y = y(x)$ y $x = x(y)$

- [**Fórmula de Leibnitz**] Para f y g funciones con derivadas de orden n en a, la derivada de orden n de $(f \cdot g)$ está dada por:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

Derivadas conocidas

1. $(c)' = 0$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
4. $(\sinh(x))' = \cosh(x)$
5. $(\cosh(x))' = \sinh(x)$
6. $(e^x)' = e^x$
7. $(\sin(x))' = \cos(x)$
8. $(\cos(x))' = -\sin(x)$
9. $(\tan(x))' = \sec(x)^2$
10. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$
13. $(a^x)' = a^x \ln(a)$
14. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}$

P1. Derive las siguientes funciones

a) $\dfrac{senh(4x)}{ln(x^2+1)}$ *b)* x^x *c)* $cosh^{-1}(x)$

P2. [**Definición de Derivada**] Sea la función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} x^n \cdot sin(\frac{1}{x}) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Estudie la diferenciabilidad de ϕ en $\mathbb{R}$ para diferentes valores de n

P3. Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y no constante, tal que cumple la siguiente propiedad:

$$f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

a) Pruebe que $f(0) = 1$. Deduzca que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) Suponga que f es derivable en 0, es decir, que $f'(0)$ existe. Pruebe que f es diferenciable en todo $x \in \mathbb{R}$ y calcule el valor de $f'(x)$ en todo $x \in \mathbb{R}$ de ser posible.

Propuestos

P4. Sea la función $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{sen(x)} & \text{si } x \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \\ c & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Se pide determinar el valor de c de modo que f sea continua $x = 0$

b) Usando la definición de derivada, calcule $f'(0)$

P5. *a)* Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables que verifican lo siguiente:

$$g(x) = xf(x) + 1, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \; g(x+y) = g(x)g(y), \qquad f(0) = 1$$

1) Demuestre que $g'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2) Demuestre que $\forall n \geq 1$, $g(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$ y calcule $f^{(n)}(0)$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x + x\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$$

existe, es positivo y calcúlelo.

P6. [Derivada Implicita:] Encuentre la recta tangente y normal a la curva de ecuación

$$e^{2arcsen(y \cdot x)} = ln(1 + x^2 + y^2)$$

En el punto P donde la curva intersecta al eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$)

"In mathematics the art of asking questions is more valuable than solving problems."
Georg Cantor